

# Faire la différence...

## De la recherche à la pratique

Une série de monographies sur la mise en pratique de la recherche produite en collaboration par le Secrétariat de la littératie et de la numératie et l'Ontario Association of Deans of Education

Monographie n°55

Pourquoi enseignons-nous les suites à motif croissant et quel est le lien avec l'algèbre?

### Ce que nous dit la recherche

- Les activités relatives aux suites à motif croissant sont un puissant outil pour présenter des concepts complexes d'algèbre aux jeunes enfants.
- Même de très jeunes élèves peuvent acquérir une compréhension des fonctions.
- Chez les élèves plus âgés, on peut utiliser les suites non numériques à motif croissant comme introduction aux représentations graphiques de fonctions.
- La façon de présenter les suites à motif croissant et d'en discuter est la clé d'une utilisation efficace.

**RUTH BEATTY** est professeure agrégée à la faculté d'éducation de l'Université Lakehead. Elle s'intéresse notamment au développement de la pensée algébrique chez les enfants de tout âge, sur l'utilisation des représentations visuelles en mathématique et sur les rapports entre la façon d'apprendre des Anishinaabe et l'enseignement des mathématiques en Occident.

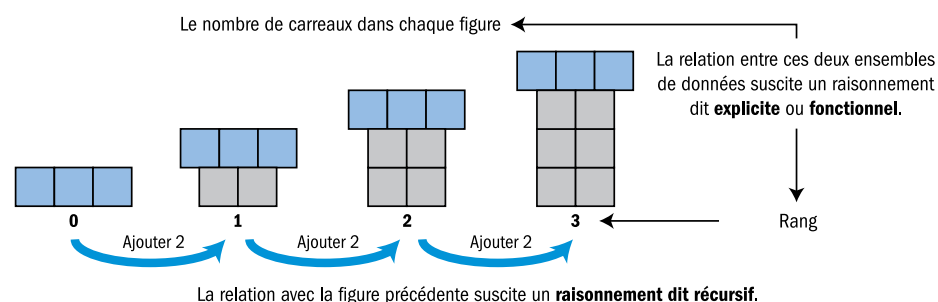
## Explorer la puissance des suites à motif croissant

Ruth Beatty, Ph. D.  
Université Lakehead

Les activités relatives aux suites à motif croissant sont omniprésentes dans les manuels de mathématique et dans le curriculum de l'Ontario de la maternelle à la 6<sup>e</sup> année. Elles permettent aux jeunes élèves de développer leur pensée algébrique de façon appropriée à leur développement.<sup>1,2,3,4</sup> Elles procurent aussi aux enseignants un puissant outil visuel pour introduire des concepts d'algèbre complexes.<sup>5,6,7,8,9</sup> Toutefois, la façon de présenter et de discuter des suites à motif croissant exerce une grande influence sur la réflexion et la communication des élèves en ce qui a trait à la structure mathématique. Cette monographie examine comment les enseignants peuvent présenter les suites à motif croissant et en discuter pour initier les élèves aux fonctions qui font partie intégrante du raisonnement algébrique.

### Deux façons de penser aux suites à motif croissant

L'activité typique suivante est axée sur les suites à motif croissant : Jean (un élève de 6<sup>e</sup> année) n'a aucun mal à décrire la suite de l'exemple 1 : « Commencer par trois et ajouter deux chaque fois ». Lorsque l'enseignant lui demande combien il y aurait de carreaux au prochain rang, il répond sans hésiter : « Il y a 9 carreaux, donc il y en aura 11 au rang 4 ». Cependant, quand on lui demande combien il y en aura au rang 100, le processus s'avère trop laborieux. « C'est trop, s'exclame-t-il, 102 peut-être? »



Exemple 1 : Deux façons de penser aux motifs croissants

La Division du rendement des élèves a pour objectif de fournir, aux enseignantes et enseignants, les résultats de la recherche actuelle sur l'enseignement et l'apprentissage. Les opinions et les conclusions exprimées dans ces monographies sont, toutefois, celles des auteurs; elles ne reflètent pas nécessairement les politiques, les opinions et l'orientation du ministère de l'Éducation de l'Ontario ou celles de la Division du rendement des élèves.

## Une note sur la terminologie...

La « position » est parfois appelée le « terme ».

## Le rôle de l'enseignant

« À l'aide d'un bon questionnement, les enseignants amènent les élèves à cheminer à partir de l'utilisation de la régularité (raisonnement récursif) vers la compréhension de la relation entre deux ensembles de valeurs (raisonnement explicite). »

Demander de décrire la figure au rang 10 démontre les limites de cette méthode. Quand on demande aux élèves de travailler à partir de suites à motif croissant comme celle-ci, ils sont capables de décrire la régularité et de prolonger la suite au rang suivant, mais ils ont du mal à généraliser de façon lointaine et explicite.<sup>16</sup> Pour prédire, par exemple, quelle sera la figure au rang 10 dans cette suite, les élèves doivent d'abord décrire les figures du rang 4 au rang 9. Si les élèves ne pensent qu'au changement d'une figure à l'autre, ils auront du mal à décrire les figures des rangs plus loin dans la suite.

## Comment passer des suites à motif croissant aux fonctions?

Si nous concentrons notre enseignement sur la relation entre deux ensembles de valeurs plutôt que sur « ce qui suit », les suites à motif croissant deviennent des outils puissants pour explorer les relations algébriques à tous les niveaux d'apprentissage. Dans l'exemple suivant, le raisonnement de deux élèves illustre l'avantage d'enseigner en mettant l'accent sur cette relation. Pour décrire la suite de l'exemple 1, Ava, âgée de six ans, dit qu'elle augmente de 2 unités à la fois. Niroshan, âgé de 11 ans, détermine la règle de la suite et explique son raisonnement. « C'est une règle 'fois 2, plus 3', parce qu'elle augmente de 2 chaque fois, mais les carreaux bleus demeurent constants ». L'enseignant lui demande combien de carreaux il y aura au rang 10, et Ava prédit « 10 carreaux gris plus 10 autres carreaux donne 20 carreaux gris et 3 carreaux bleus ». Niroshan réplique : « C'est facile. 10 fois 2 font 20 carreaux gris et 3 carreaux bleus ». Encore, quand on leur demande de prédire le nombre de carreaux dans la figure au rang 100, les deux élèves parviennent à la bonne réponse. D'autres questions posées à Niroshan révèlent qu'il peut aussi travailler à rebours pour trouver le rang si on lui donne un nombre de carreaux. Quand on lui demande « S'il y avait 163 carreaux, à quel rang se trouverait cette figure? », Niroshan répond « Voyons... 163 moins 3 font 160 qui, divisé par deux, donne 80! » Il est évident qu'Ava et Niroshan peuvent décrire la règle et prédire avec précision le nombre de carreaux pour n'importe quel rang, bien au-delà du « ce qui suit ».

## Comment passer de « ce qui suit » à l'exploration des fonctions?

Quand on présente les suites à motif croissant aux élèves, l'enseignement tend à privilégier le raisonnement additif. C'est pourquoi les élèves décrivent souvent le changement par rapport à la figure précédente, comme l'a fait Jean, en disant que la régularité consiste « à commencer par 3 et à ajouter 2 chaque fois ». Ce type de raisonnement fait que les élèves pensent uniquement à ce qui suit. Il ne leur permet pas a) de formuler la structure mathématique de la suite à motif croissant, ou b) de prédire exactement le nombre de carreaux correspondant à une figure dans la suite. Il est donc plus efficace de mettre l'accent sur la relation entre le rang de la figure et le nombre de carreaux.

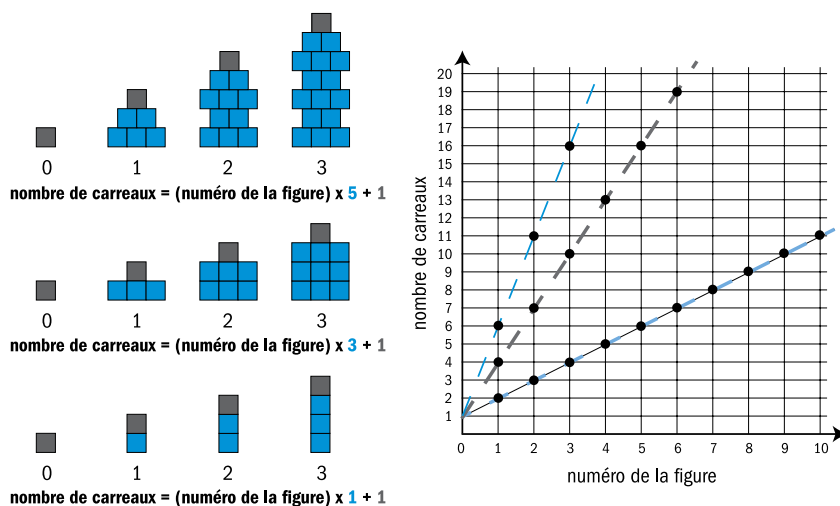
Les suites à motif croissant offrent aux élèves une façon de penser à la relation entre deux ensembles de données. En mathématique, une fonction est une relation entre deux ensembles de données. Chaque élément d'un ensemble correspond à un élément unique de l'autre ensemble, et la règle d'une fonction décrit comment les éléments d'un ensemble correspondent aux éléments d'un autre ensemble. Par exemple, dans la suite à motif croissant de l'exemple 1, un nombre unique de carreaux correspond à chaque figure de la suite. L'exemple illustre la relation entre un ensemble de données (rang ou numéro de la figure) et un autre ensemble de données (nombre de carreaux à chaque figure). Pour comprendre cette

relation, l'élève doit utiliser un raisonnement *explicite* ou *fonctionnel* pour déterminer le nombre de carreaux de n'importe quelle figure.

Les suites à motif croissant offrent aux élèves une façon concrète d'étudier la notion de la généralisation sous la forme de règles de suites à motif croissant. Par exemple, en généralisant, Niroshan a décrit la règle de la suite qui lui a permis de prédire correctement le nombre de carreaux pour n'importe quelle figure de la suite.

La recherche démontre que même de très jeunes élèves peuvent développer une compréhension des fonctions.<sup>10,11,12,13</sup> Ava a perçu la règle comme deux groupes de carreaux qui augmentent de 2, et comme 2 colonnes de carreaux, chacune composée d'un nombre de carreaux égal au numéro de la figure. Elle s'est aussi souvenue que les 3 carreaux bleus restent les mêmes (constante).

Chez les élèves plus âgés, les suites à motif croissant peuvent servir d'introduction aux représentations graphiques des fonctions.<sup>14,15</sup> Le rang des figures dans les suites à motif croissant correspond aux valeurs sur l'axe horizontal. Le nombre total de carreaux de chaque figure est représenté par les valeurs sur l'axe vertical. L'axe vertical représente aussi le nombre de carreaux qu'il y aura au rang 0 (la valeur de la constante), qui est l'ordonnée de la représentation graphique. (L'exemple 2 illustre ces suites à motif croissant ainsi que l'incidence de divers multiplicateurs sur la courbe de tendance de la représentation du graphique.)



Exemple 2 : Représentations multiples de trois suites à motif croissant

## Comment pouvons-nous optimiser l'utilisation des suites à motif croissant?

- Il faut comprendre le concept des suites à motif croissant en tant qu'enseignante et enseignant et avoir des exemples d'un bon questionnement qui suscite le raisonnement et la communication à portée de main. Les ressources telles que CLIPS, Mettre l'accent sur le raisonnement algébrique et *From Patterns to Algebra* peuvent faire cheminer votre réflexion et vous donner les moyens de faire évoluer le raisonnement de vos élèves.
- En présentant les suites à motif croissant, verbalisez de manière explicite la relation entre le numéro de la figure et le nombre de carreaux. Utilisez l'exemple 1 en classe. Faites découvrir qu'à chaque figure, il y a un ensemble de 3 carreaux bleus et un nombre croissant de groupes de 2 carreaux gris. Notez que le numéro de la figure indique combien il y a de « groupes de », tandis que la régularité de la suite indique combien il y a de carreaux dans chaque groupe. L'élément constant de la règle indique combien de carreaux restent les mêmes.

## Une ressource pédagogique utile

Voir *From Patterns to Algebra* de Ruth Beatty et Catherine D. Bruce pour d'autres exemples de représentations graphiques ainsi qu'une série complète de leçons. *Lessons for Exploring Linear Relationships* (Nelson Education Canada).

Implications pour la pratique

- Au lieu de mettre l'accent sur « ce qui suit », demandez aux élèves de prédire le nombre de carreaux dans une figure proche (p. ex., la figure au rang 10) et dans une figure éloignée (p. ex., au rang 100). Demandez aussi quelle est la règle qui permet de prédire correctement le nombre de carreaux pour n'importe quelle figure dans la suite. Si on se contente de demander aux élèves « ce qui suit », on accentue la pensée récursive.
- Il faut encourager tous les élèves de la maternelle à la 8<sup>e</sup> année à construire concrètement des suites à motif croissant en utilisant des carreaux et des cartes numérotées représentant le numéro de la figure. Ainsi, ils apprendront la relation entre le numéro de la figure et le nombre de carreaux à chaque rang. Le processus qui consiste à voir que la régularité se répète d'une figure à l'autre selon le rang (comme les « groupes de 2 » carreaux gris de l'exemple 1) encourage les élèves à développer la pensée multiplicative au-delà d'une simple mémorisation des faits de multiplication.
- Offrez aux élèves des occasions d'établir des liens entre les diverses représentations. Demandez, par exemple, comment changer le nombre de carreaux dans les « groupes »

(le multiplicateur) dans une suite va influencer la règle de la suite et la courbe de tendance de la représentation graphique. Invitez les élèves à vérifier leurs hypothèses en traçant des exemples sur une représentation graphique. Cette exploration montre aux élèves que la valeur du multiplicateur détermine le taux de croissance de la relation et, par conséquent, la pente de la courbe de tendance (voir l'exemple 2). Demandez aux élèves de répéter cet exercice en utilisant le même multiplicateur et des constantes différentes. Comparez les résultats et discutez.

## En bref

Les suites à motif croissant permettent aux élèves de bien comprendre les fonctions. À l'aide d'un bon questionnement, les enseignants amènent les élèves à passer de l'utilisation de la régularité (raisonnement récursif) vers la compréhension de la relation entre deux ensembles de valeurs (raisonnement explicite). En soulignant la relation entre le numéro de la figure et le nombre de carreaux, et en encourageant les élèves à faire des prédictions sur les figures subséquentes dans la suite, les enseignants peuvent aider même les jeunes élèves à faire ce changement conceptuel.

## BIBLIOGRAPHIE

1. Warren, E. et Cooper, T. (2006). *Repeating and growing pattern rules: Relationships between geometric and numerical representations*. Étude présentée au congrès annuel de l'American Educational Research Association, San Francisco.
2. Blanton, M. et Kaput, J. (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. Dans M. Jonsen Hoines et A. Fuglestad (éditeurs), *Proceedings of the 28<sup>th</sup> Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 2* (pp. 135–142). Norvège: Bergen University College.
3. Kaput, J. et Blanton, M. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears." *Teaching Children Mathematics*, 10, 70–77.
4. Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. Dans T.D. Grouws (éditeur), *The handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York, NY: Macmillan.
5. Yersuhalmy, M. et Sternberg, B. (2001). Charting a visual course to the concept of function. Dans A. Cuoco et F. Curcio (éditeurs), *The roles and representations in school mathematics, National Council of Teachers of Mathematics 2001 Yearbook*. Reston, VA: NCTM.
6. Noss, R., Healy, L. et Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 203–233.
7. Zazkis, R. et Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 379–402.
8. Orton, J., Orton, A. et Roper, T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. Dans A. Orton (éditeurs), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp.121–136). Londres : Cassell.
9. Stacey, K. (1999). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 147–164.
10. Warren, E. et Cooper, T. J. (2008). Generalizing the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 67, 171–185.
11. Beatty, R. (2010). Supporting algebraic thinking: Prioritizing visual representations, *OAME Gazette*, 49(2), 28–33.
12. Beatty, R. et Bruce, C. (2012). Supporting students with learning disabilities to explore linear relationships using online learning objects, *PNA* 7, 21–39.
13. Beatty, R. (2012). The impact of online activities on students' generalizing strategies and justifications for linear growing patterns. Dans L. R. Van Zoest, J.-J. Lo, et J. L. Kratky (éditeurs), *Proceedings of the 34th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 927–934). Kalamazoo: Western Michigan University.
14. Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. Dans N. Bednarz, C. Kieran et L. Lee (éditeurs), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65–86). Dordrecht, Hollande: Kluwer Academic.
15. Beatty, R. (2007). Young students' understanding of linear functions: Using geometric growing patterns to mediate the link between symbolic notation and graphs. Dans T. Lamberg (éditeur), *Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the Psychology of Mathematics Education* (pp. 148–155). Lake Tahoe: University of Nevada, Reno.
16. ONTARIO. Ministère de l'Éducation. (2013) Mettre l'accent sur le raisonnement algébrique, *Document d'appui sur l'importance de l'enseignement des mathématiques*. Toronto, ON : Imprimeur de la Reine pour l'Ontario