M-12

METTRE L'ACCENT SUR LES FRACTIONS

Document d'appui sur l'importance de l'enseignement des mathématiques

Table des matières

Mettre l'accent sur les fractions

« La recherche suggère que l'introduction de changements explicites et ciblés dans les pratiques d'enseignement et d'apprentissage peut avoir un impact majeur sur la compréhension des fractions chez les enfants et conséquemment, sur leur succès futur en mathématique. Certaines décisions pédagogiques ont une influence importante sur la capacité des élèves à comprendre le concept des fractions, notamment leur habileté à représenter adéquatement des fractions, à comparer la valeur relative de deux fractions et à effectuer des calculs avec exactitude. »

(Bruce, Chang, Flynn et Yearley, 2013, p. 32, traduction libre)

Le document *Mettre l'accent sur l'enseignement des mathématiques* donne un aperçu de ce qu'il faut faire pour aider les élèves de l'Ontario à approfondir leur apprentissage et à mieux comprendre les mathématiques. Il présente sept principes fondamentaux pour planifier et réaliser des améliorations, et donne des exemples pour chacun de ces principes.

Le présent document traite essentiellement des fractions dans le domaine des mathématiques. Des conclusions importantes de recherches effectuées en Ontario sont utilisées tout au long du document pour établir des liens entre l'apprentissage et l'enseignement des fractions de la maternelle à la 12e année. Ce document suscitera des discussions et contribuera à une meilleure connaissance de ce sujet important. Des documents d'appui à venir exploreront d'autres domaines majeurs de l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques.

LES SEPT PRINCIPES FONDAMENTAUX DE L'AMÉLIORATION DES MATHÉMATIQUES, M–12

- Mettre l'accent sur les mathématiques.
- Coordonner et consolider le leadership en mathématiques.
- Développer une compréhension de l'enseignement efficace des mathématiques.
- Soutenir les pratiques collaboratives d'apprentissage professionnel en mathématiques.
- Créer un environnement d'apprentissage propice aux mathématiques.
- Valoriser l'évaluation au service de l'apprentissage des mathématiques pour la réussite de tous les élèves.
- Faciliter l'accès aux ressources traitant des mathématiques.

Pourquoi est-il important de comprendre les fractions?

« Aucun domaine des mathématiques à l'école élémentaire n'est aussi mathématiquement riche, cognitivement compliqué et difficile à enseigner que les fractions, les rapports et la proportionnalité. Ces idées expriment toutes des relations mathématiques : les fractions et les rapports sont des nombres "relationnels". C'est le premier endroit où les élèves se trouvent en présence de nombres qui représentent une relation entre deux quantités discrètes ou continues, tels que $\frac{3}{4}$, plutôt qu'une quantité discrète simple (p.ex., trois pommes) ou continue (p.ex., 4 cm de corde). »

(Litwiller et Bright, 2002, p. 3, traduction libre)

« La majorité des enfants arrivent à la maternelle ou au jardin d'enfants dotés d'une bonne connaissance des mathématiques… Ils développent une compréhension conceptuelle à partir d'expériences du quotidien telles que la manipulation d'objets (p. ex., assembler les différentes formes d'un jouet de construction), la comparaison (p. ex., ce sac est très lourd), et le questionnement (p. ex., *Qui est le plus grand? Qui a le plus de biscuits? Combien mesure-t-il?*). » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010, p. 27). Ces concepts constituent le fondement de la pensée en termes de fractions.

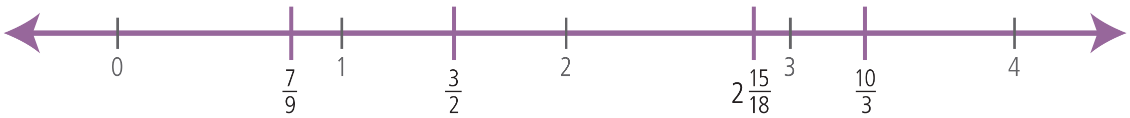
Idéalement, pendant que les élèves développent leur sens du nombre durant leurs études élémentaires, on leur donne des possibilités d'établir des relations entre les nombres entiers, les fractions, les nombres décimaux et les pourcentages de sorte à favoriser un approfondissement de leur compréhension de la proportionnalité et des rapports. En outre, au secondaire, les élèves se servent de cette base pour comprendre les relations mathématiques en algèbre et dans l'apprentissage relatif aux relations linéaires, à la trigonométrie et à la mesure des angles.

Le *College Student Achievement Project*, une étude sur la réussite scolaire dans les cours de mathématique de première année de collège, a déterminé que la compréhension des fractions se retrouvait parmi les habiletés les plus nécessaires dans les mathématiques collégiales, tout aussi bien dans les cours de technologie que dans ceux de gestion, et constituait l'une des principales disciplines dans lesquelles de nombreux élèves ne possédaient pas les connaissances nécessaires (Orpwood et collab., 2012).

Le *National Mathematics Panel Report* suggère que « la difficulté à apprendre les fractions est omniprésente et constitue un obstacle à tout progrès ultérieur en mathématiques et dans d'autres domaines dépendant des mathématiques, notamment l'algèbre. Elle a aussi été liée à des difficultés chez les adultes, telles que l'incapacité de comprendre des régimes posologiques » (Petit, Laird et Marsden, 2010, p. xi, traduction libre). Une compréhension solide des divers sens que les fractions peuvent avoir et une habileté robuste à raisonner et à utiliser des quantités se présentant sous forme de fractions aident les élèves dans l'apprentissage des mathématiques et dans la vie quotidienne (p. ex., cuisine, menuiserie, couture).

Qu’est-ce qu’une fraction?

Une fraction représente tout simplement un **nombre**, tel que représenté sur la droite numérique ci-dessous :



Cependant, sous cette très simple description, on trouve quelques relations et concepts mathématiques très complexes qui seront étudiés dans ce document. Ces relations – les relations partie-tout, les relations partie-partie, les fractions présentées comme quotients ou les fractions présentées comme opérateurs – ne sont pas mutuellement exclusives; il s’agit de façons différentes de représenter et de penser en termes de fractions.

Examinons de plus près les relations et les concepts associés à la notation fractionnaire suivants :

- relation partie-tout
- relation partie-partie
- fraction comme quotient
- fraction comme opérateur

Tout au long de ce document, les représentations suivantes sont utilisées pour montrer comment il est possible d’aider les élèves à visualiser, comprendre et assimiler des concepts abstraits :

- un modèle de longueur (p.ex., une droite numérique)
- un modèle de surface (p.ex., un rectangle)
- un modèle de volume (p.ex., un cylindre)
- un modèle d’ensemble (p.ex., des objets aléatoires)

Commençons par le commencement

Avant d’entrer dans le vif du sujet, voici quelques questions et réponses que vous trouverez peut-être utiles.

Que sont un numérateur et un dénominateur?

Le numérateur est le nombre au-dessus de la ligne dans une fraction. C’est le nombre de parties équivalentes du tout dont se compose la fraction. Le dénominateur est le nombre en dessous de la ligne dans une fraction. C’est le nombre de parties équivalentes par lequel le tout est divisé. Par exemple, dans $\frac{3}{4}$, le numérateur est 3 et le dénominateur est 4.

Qu’est-ce qu’un modèle de surface?

Dans un modèle de surface, une surface représente le tout. Ce tout est divisé en régions fractionnaires. Bien que les régions fractionnaires aient toutes la même aire, elles ne sont pas nécessairement congruentes (mêmes grandeurs, dimensions ou apparence).

Qu’est-ce qu’un modèle d’ensemble?

Dans un modèle d’ensemble, un ensemble d’éléments représente la quantité totale ou le tout. Des sous-ensembles du tout constituent les parties fractionnaires. Divers matériels peuvent être utilisés pour les modèles d’ensemble.

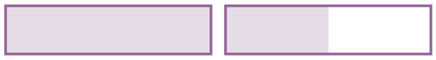
Qu’est-ce qu’un modèle de volume?

Dans un modèle de volume, une forme tridimensionnelle représente le tout. Le tout est divisé en régions fractionnaires de l’espace occupé par la forme.

Relations partie-tout

Les élèves sont très familiers avec la relation **partie-tout** des fractions dans lesquelles le dénominateur indique l'unité fractionnaire, et le numérateur indique le nombre d'unités fractionnaires comptées.

Modèles de surface représentant des relations partie-tout

$\frac{3}{2}$ 

Le dénominateur indique que l'unité fractionnaire est *le demi* et le numérateur indique que l'on a trois fois *un demi*. Une unité fractionnaire représente chacune des parties obtenues lorsque le tout est divisé en parties équivalentes.

$\frac{7}{9}$ 

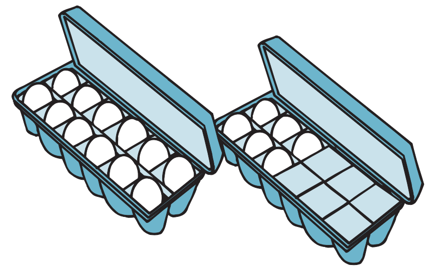
Le dénominateur indique que l'unité fractionnaire est le *neuvième*, et le numérateur indique que l'on a sept fois une unité fractionnaire d'un *neuvième*.

Le tout est identifié par le rectangle encadré en gras. Les fractions des deux exemples sont représentées par les surfaces ombrées des rectangles.

Modèles d'ensemble représentant des relations partie-tout

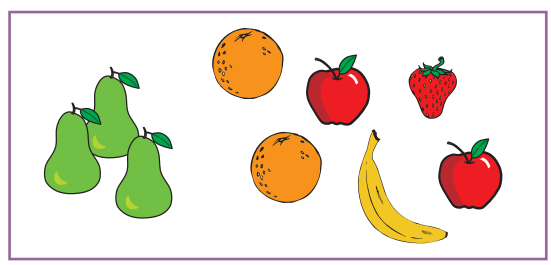
Dans le cas d'un ensemble d'objets, il est important d'être explicite sur ce qui constitue le tout.

$\frac{3}{2}$ boîtes d'œufs



Le tout est identifié comme étant la boîte de 12 œufs.

Les $\frac{7}{9}$ de l'ensemble ne sont pas des oranges.



Lorsque l'on identifie une fraction d'un ensemble, tout attribut peut être considéré. Les éléments constituant l'ensemble peuvent avoir des grandeurs différentes quand on prête attention à un autre attribut, comme la couleur dans l'exemple du fruit. Le tout est identifié comme étant un ensemble de fruits.

Qu'est-ce qu'un attribut?

« Un attribut d'un objet correspond à l'une de ses propriétés observables, par exemple couleur, forme, grandeur. » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2009, p. 38).

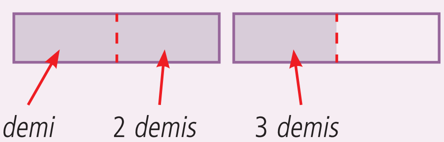
Modèle de longueur (droite numérique) représentant des relations partie-tout

Une fraction sur une droite numérique, telle que celle illustrée ci-dessous, constitue un autre exemple de relation partie-tout. Dans ce cas, le tout est 1.

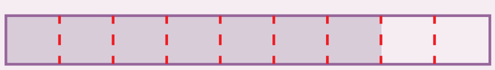
Récapitulons maintenant les relations partie-tout

Dans une **relation partie-tout**, le nombre du dénominateur indique l'unité fractionnaire, c'est-à-dire le nombre de parties équivalentes par lesquelles le tout a été divisé. Le nombre du numérateur indique le nombre de parties équivalentes dénombrées. Par exemple,

$\frac{3}{2}$ de la surface du rectangle sont ombrés.



$\frac{7}{9}$ de la surface du rectangle est ombrée.



Le fait de savoir que le dénominateur est 9 peut nous orienter vers une stratégie pour diviser le tout.

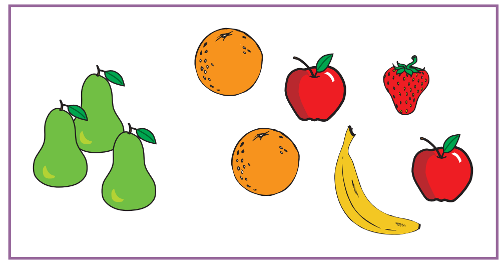
Division

La division d'un modèle de surface consiste à diviser cette surface en régions qui ne se chevauchent pas. Dans le cas des unités fractionnaires d'un tout, il s'agit de partager en régions équivalentes, c'est-à-dire de *partager en parties équivalentes*.

Relations partie-partie ou Rapports de partie à partie

Une fraction peut aussi être utilisée pour représenter une relation **partie-partie ou un rapport de partie à partie**. En raison de la préoccupation de comprendre que les fractions sont des parties d'un tout, ainsi que de l'importance exagérée qu'on accorde aux fractions propres (Bruce, Chang, Flynn et Yearley, 2013, p. 29), les cours donnés en Amérique du Nord ont traditionnellement peu exploré les fractions comme étant des relations partie-partie ou des rapports de partie à partie.

Dans l'exemple de l'ensemble de fruits, nous disposons de divers moyens pour décrire la comparaison d'une partie de l'ensemble à une autre partie de l'ensemble. Si nous voulons comparer les fruits autres que les oranges aux oranges de l'ensemble, nous pouvons dire que: « pour chaque sept fruits qui ne sont pas des oranges, il y a deux oranges » ou encore « le rapport de fruits autres que des oranges aux oranges est 7 à 2 (7:2) ».



Si nous utilisons une notation fractionnaire, ce serait $\frac{7}{2}$ (se dit *sept à deux*), car il y a plus de fruits qui ne sont pas orange qu'il y a des oranges.

La somme du numérateur et du dénominateur donne l'unité fractionnaire, dans ce cas des neuvièmes, utilisée pour partager l'ensemble.

$$\frac{7}{2}$$

le numérateur indique le nombre de fruits autres que des oranges dans l'ensemble.

le dénominateur indique le nombre d'oranges dans l'ensemble.

Les jeunes apprenantes et apprenants qui sont habitués à trier des ensembles d'objets peuvent initialement décrire ces ensembles en utilisant des fractions représentant une relation partie-partie ou un rapport de partie à partie. Les élèves plus âgés explorent les rapports, les taux et les proportions, puis appliquent ces concepts à l'étude de la pente (taux de changement), de la trigonométrie et des équations linéaires.

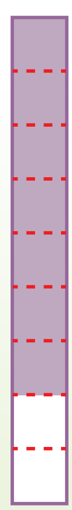
Trois façons de représenter les relations partie-partie

Modèle de longueur (droite numérique)

Cette droite numérique indique une relation partie-partie dans laquelle la distance sur laquelle un drapeau a été hissé le long d'un mât est $\frac{3}{2}$ de la distance qui lui reste à parcourir (ou pour chaque 3 segments du hissage, il y a 2 segments qui restent).

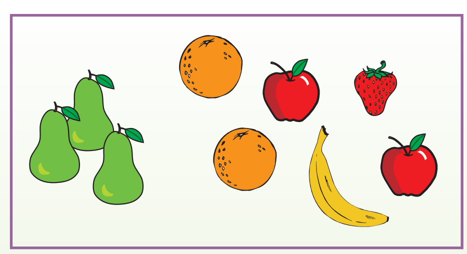
Modèle de surface

Dans ce rectangle, les $\frac{7}{2}$ des régions sont ombrés comparativement à ceux qui ne le sont pas, ce qui veut dire que pour chaque 7 régions ombrées, il y en a 2 qui ne le sont pas.



Modèle d'ensemble

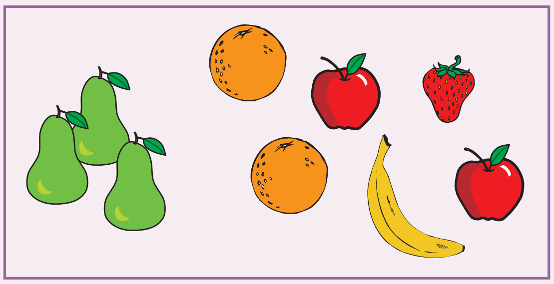
Dans l'ensemble de fruits, le nombre de fruits qui sont des poires est égal à $\frac{3}{6}$ du nombre de fruits qui ne sont pas des poires.



Récapitulons maintenant les relations partie-partie

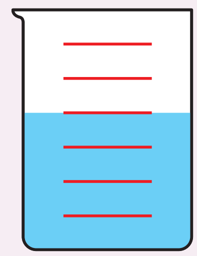
Dans une **relation partie-partie**, le nombre du dénominateur indique combien il y a d'éléments dans une partie de l'ensemble. Le nombre du numérateur indique combien il y a d'éléments dans l'autre partie de l'ensemble. L'unité fractionnaire, c'est-à-dire le nombre de parties équivalentes du tout, est déterminée par la somme des nombres du numérateur et du dénominateur. Par exemple,

Dans l'ensemble de fruits, le nombre de fruits qui sont des poires est égal à $\frac{3}{6}$ du nombre de fruits qui ne sont pas des poires.



Le nombre total de fruits dans cet ensemble est 9.

La fraction $\frac{4}{3}$ décrit la relation partie-partie de ce qui est rempli et de ce qui ne l'est pas dans ce contenant.

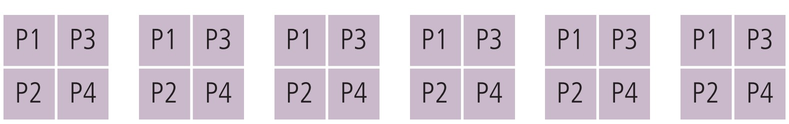


Le nombre total de parties équivalentes dans le contenant est 7.

La fraction présentée comme quotient

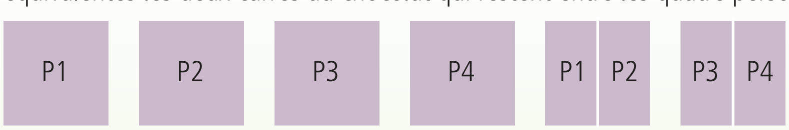
Le concept de fraction présentée comme **quotient** est relatif à la division du numérateur par le dénominateur. Dans les premières années d'études, les élèves sont initiés aux fractions et à celles-ci comme quotient dans des contextes de partage égal. Par exemple, si quatre élèves répartissent également six objets, ils doivent les partager en parties équivalentes. Cette tâche peut être accomplie de diverses façons. Par exemple, la répartition en parties équivalentes de six carrés au chocolat entre quatre personnes peut être effectuée en :

- partageant chaque carré au chocolat en quatre puis en distribuant des quarts



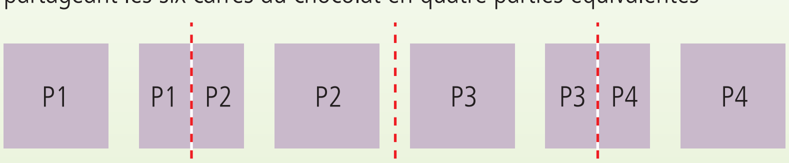
Chaque personne obtiendrait six *quarts* de carré au chocolat

- remettant à chaque personne un carré au chocolat complet, puis en répartissant en parties équivalentes les deux carrés au chocolat qui restent entre les quatre personnes



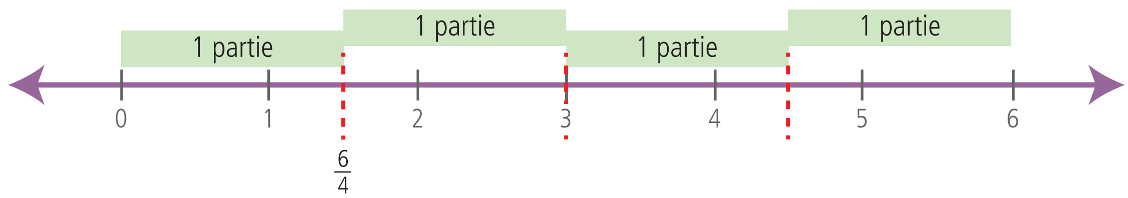
Chaque personne obtiendrait un carré au chocolat *au complet*, puis *un demi* des deux carrés au chocolat qui restent.

- partageant les six carrés au chocolat en quatre parties équivalentes



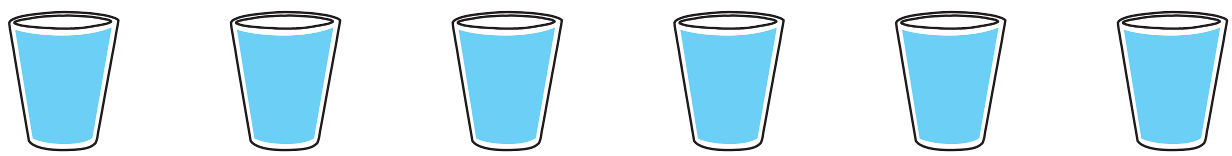
Chaque personne obtiendrait *un carré au chocolat et demi*

La dernière méthode est liée à la représentation de $\frac{6}{4}$ sur la droite numérique. Six est partagé en quatre parties équivalentes, et on tient compte de la grandeur ou de la longueur de chaque partie.



Parfois, le contexte utilisé pour poser la question peut avoir une influence sur la stratégie choisie par les élèves. Par exemple, supposons que la question sur les carrés au chocolat soit modifiée comme suit :

Répartis également six verres d'eau entre quatre personnes.



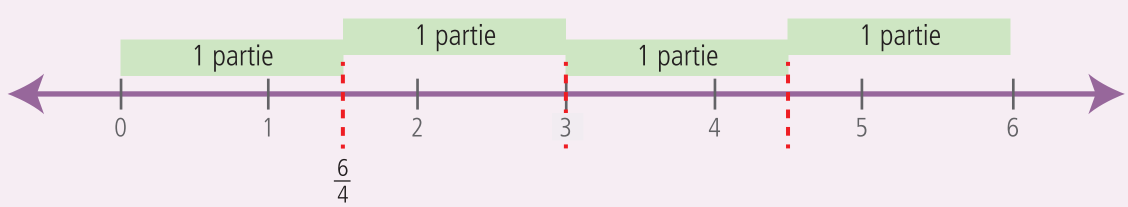
Les élèves peuvent avoir tendance à vouloir donner un verre complet à chaque personne, puis à répartir les deux verres restants de façon égale en demis, plutôt que de partager le contenu de chaque verre d'eau en quarts.

Ensuite, les élèves apprennent que la division du numérateur par le dénominateur donne l'équivalent décimal d'une fraction. Dans le cas de l'exemple ci-dessus, les élèves peuvent explorer pourquoi $\frac{6}{4} = 1,5$.

Récapitulons maintenant les fractions comme quotient

Lorsqu'une **fraction est présentée comme un quotient**, le contexte de la question suggère une répartition égale ou une division du nombre constituant le numérateur par le nombre constituant le dénominateur. Le résultat est l'équivalent décimal de cette fraction. Par exemple,

$\frac{6}{4} = 6 \div 4$ ou 6 partagé en 4 parties équivalentes



Chaque partie est égale à $1\frac{1}{2}$ ou 1,5.

La fraction présentée comme opérateur

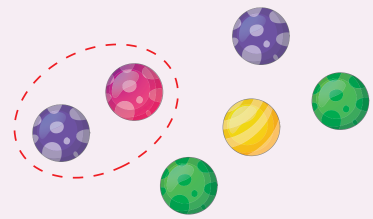
Le concept de la fraction présentée comme un **opérateur** est utilisé pour augmenter ou diminuer une quantité selon un facteur. Les élèves s'en aperçoivent au début de leur apprentissage lorsqu'ils décident de prendre *le tiers* d'un objet complet, par exemple *le tiers* d'une barre de céréales. Si les élèves se demandent ce qu'est *un tiers* d'un ensemble de six billes, ils peuvent découvrir qu'*un tiers* de six est égal à deux. À mesure que les élèves travaillent avec de plus grands nombres, ils peuvent découvrir la relation avec la multiplication et utiliser cette connaissance pour déterminer, par exemple, le tiers du nombre d'élèves dans l'école (p. ex., en calculant que $\frac{1}{3}$ de 850 élèves donne $\frac{1}{3} \times 850$ élèves).

Récapitulons maintenant les fractions comme opérateur

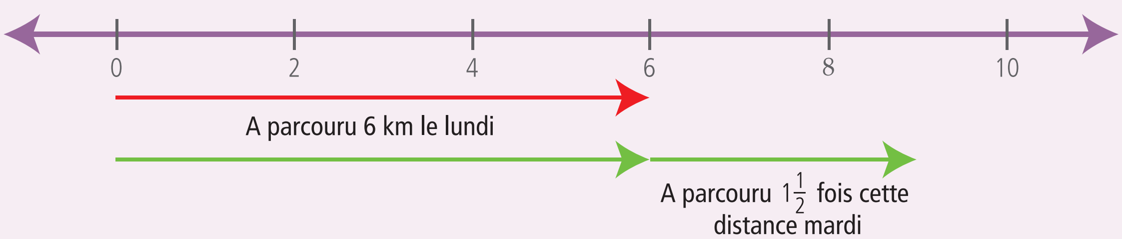
Lorsqu'une **fraction est présentée comme un opérateur**, elle est utilisée pour diminuer ou augmenter une quantité. Par exemple,

$\frac{1}{3}$ d'un ensemble de 6 billes est 2 billes.

Ici, $\frac{1}{3}$ est utilisé en tant qu'opérateur pour réduire la quantité à 2 billes.



Un garçon parcourt 6 km le lundi et $1\frac{1}{2}$ fois cette distance le mardi.



Ici, $1\frac{1}{2}$ est utilisé en tant qu'opérateur pour augmenter la distance à 9 km.

Dans le reste de ce document, vous verrez comment ces concepts et relations associés à la notation fractionnaire jouent un rôle dans l'apprentissage des mathématiques des élèves durant leurs années d'études.

« Ces façons de penser aux fractions pourraient sembler hors de la portée des élèves de l'élémentaire, mais ce n'est pas le cas. L'important est de commencer à développer un sens plutôt que de présenter le symbole seulement. Étant donné que les expériences acquises par les enfants lorsqu'ils coupent, répartissent, divisent, mesurent et assemblent des quantités leur sont signifiantes, des problèmes vécus à travers ces expériences constituent une richesse en ce qui concerne les fractions. »

(Empson et Levi, 2011, p. xxii, traduction libre)

Exploration des concepts clés

Dans le but de permettre aux élèves d'explorer et de construire les concepts fondamentaux, l'enseignement des fractions à travers les années d'étude devrait être basé sur une utilisation d'une terminologie et des représentations cohérentes et consistantes. La compréhension de l'équivalence et le sens des opérations avec des fractions peuvent alors être développés de façon signifiante.

Cette section examine certains des concepts clés de la compréhension des fractions :

- types de fractions
- fractions unitaires
- le tout
- équivalence
- comparer et ordonner
- opérations sur des fractions

Types de fractions

<table>
<tr>
<td colspan="4">Fractions simples
Le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers; le dénominateur est ≠ 0.
$\frac{7}{9}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{21}{26}$ $\frac{1}{29}$ $\frac{49}{73}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{125}{28}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{1}{2}$</td>
<td rowspan="2">Fractions complexes
Le numérateur ou le dénominateur, ou encore les deux, sont des fractions.
$\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{7}}$ $\frac{\frac{3}{2}}{5}$
$\frac{3}{\frac{5}{7}}$</td>
</tr>
<tr>
<td>Fractions propres
Le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers; le numérateur est plus petit que le dénominateur.
$\frac{1}{2}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{21}{26}$ $\frac{1}{29}$
$\frac{49}{73}$ $\frac{7}{9}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{5}{8}$</td>
<td>Fractions unitaires
Le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers; le numérateur = 1.
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{29}$</td>
<td>Nombres fractionnaires
Quantité représentée par une fraction propre.
$3\frac{4}{5}$ $12\frac{1}{29}$
$7\frac{21}{26}$</td>
<td>Fractions impropres
Le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers; le numérateur est plus grand que le dénominateur
$\frac{3}{2}$ $\frac{125}{28}$</td>
</tr>
</table>

Dans le tableau, on notera que chaque numérateur et dénominateur pourrait aussi être un nombre négatif.

Dans le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année Mathématiques, les fractions simples représentent la majeure partie de l'enseignement des fractions, tandis que les élèves du secondaire travaillent avec des fractions complexes, et aussi des fractions algébriques simples (p. ex., $\frac{x}{5}$) ainsi que complexes (p. ex., $\frac{\frac{x}{5}}{\frac{x}{15}}$). Le fait de présenter aux élèves des fractions impropres ou des nombres fractionnaires en même temps que des fractions unitaires et des fractions propres leur permet de développer le sens d'une fraction comme un nombre. Cette présentation aide aussi à éviter une compréhension limitée des fractions, qui peut résulter d'un apprentissage portant uniquement sur les fractions propres. Ceci se produit par exemple lorsque les élèves voient les fractions comme étant des « parties de », (p.ex., $\frac{7}{9}$ signifie 7 parties de 9). Ceci pourrait amener les élèves à éprouver des difficultés avec le sens de $\frac{9}{7}$, car « 9 parties de 7 » n'est pas logique.

Ainsi qu'illustré dans le tableau, les fractions simples incluent des unités fractionnaires allant au-delà des demis, des tiers, des quarts, des cinquièmes et des huitièmes. Le sens des nombres fractionnaires se développe grâce à des occasions d'explorer des concepts à l'aide d'une étendue de fractions, parmi lesquelles on retrouve des dénominateurs moins usuels.

Les types de fractions donnés dans le tableau peuvent être utilisés dans chacune des relations et des concepts associés à la notation fractionnaire (partie-tout, partie-partie, fraction comme quotient et fraction comme opérateur). En outre, les représentations de modèles continus (surface, longueur, volume) et de modèles discrets (ensemble) devraient être utilisées pour chaque concept.

Lorsque les élèves développent une compréhension des fractions, ils peuvent en venir à représenter une relation en incluant un nombre décimal dans le numérateur, par exemple $\frac{2{,}5}{6}$. Bien que le raisonnement puisse être mathématiquement correct, il ne s'agit pas d'une notation mathématique généralement acceptée. On devrait aider les élèves à comprendre comment une telle réponse est équivalente à d'autres réponses données par leurs camarades de classe, telles que $\frac{5}{12}$ ou $\frac{10}{24}$.

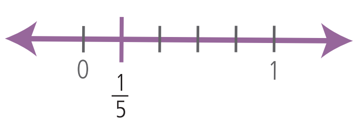
Fractions unitaires

Dans une fraction partie-tout, le dénominateur indique l'unité fractionnaire, c'est-à-dire le nombre de parties équivalentes qui composent le tout.

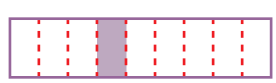
Dans un modèle continu, tel qu'une droite numérique ou une forme, chaque partie a une aire ou une longueur égale.

Dans un modèle d'ensemble, il y a un nombre égal d'éléments dans chaque partie.

Prenons l'exemple des fractions unitaires suivantes :

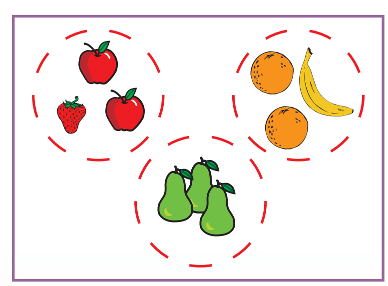


1 *cinquième* de la distance de 0 à 1



$\frac{1}{9}$ de l'aire de la surface totale est ombrée

1 *neuvième*



$\frac{1}{3}$ de l'ensemble de fruits sont des poires

1 *tiers*

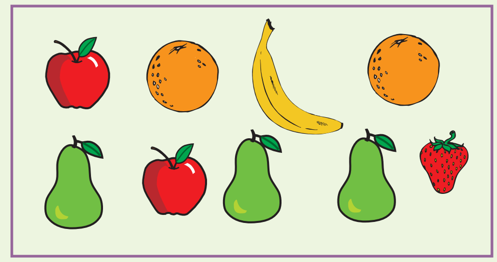
Les élèves développent une souplesse dans leurs représentations des fractions unitaires, y compris des représentations concrètes, iconiques et symboliques (nombres). On devrait leur donner des possibilités de créer des fractions unitaires par fractionnement en parties équivalentes, et de recréer le tout par itération ou répétition d'une fraction unitaire.

L'*itération* consiste à placer, à plusieurs reprises et de manière ordonnée, une seule fraction unitaire pour créer une nouvelle fraction ou un tout.

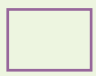
Voici des exemples d'exercices :

Quelle fraction unitaire peut être utilisée pour décrire la région ombrée de ce rectangle?

Quelle fraction des fruits sont des bananes?

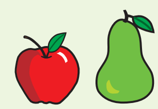


Si cette part représente $\frac{1}{6}$, quel pourrait être un tout possible?



$\frac{1}{6}$

Si ces fruits représentent $\frac{1}{3}$ de l'ensemble, combien de fruits contient l'ensemble?



$\frac{1}{3}$

À mesure que les élèves commencent à comprendre la grandeur relative des fractions unitaires (par exemple, $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ pour le même tout) et les diverses façons d'assembler et décomposer des fractions au cours de telles activités, ils développent un sens du nombre des fractions.

Les élèves améliorent leur compréhension des grandeurs relatives en examinant l'impact d'un changement du dénominateur sur la grandeur des parties équivalentes. Lorsque les élèves utilisent des représentations concrètes, ils peuvent proposer et vérifier des conjectures sur ces relations, telles que : « À mesure que je découpe la surface en un plus grand nombre de régions, chaque région devient plus petite. Je pense que plus le dénominateur est grand, plus la région est petite. Je pense donc que $\frac{1}{10}$ correspond à une plus grande région que $\frac{1}{20}$ du tout. » Les élèves peuvent ensuite construire un modèle, tel qu'un diagramme, ou utiliser du matériel de manipulation pour déterminer si cette relation est vraie et formuler une généralisation.

Qu'est-ce qu'une conjecture?

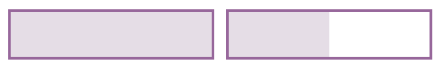
« Une conjecture est l'expression d'une idée perçue comme étant vraie dans toute situation semblable. » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008, p.10)

Le tout

Dans toute fraction, il existe une relation implicite entre le tout, le nombre de parties et la portion examinée. Par exemple, si une fraction est présentée symboliquement sans contexte ni modèle, on suppose qu'il s'agit d'une fraction partie-tout. Il importe d'être clair au sujet de la relation représentée par une fraction au moyen d'une description précise avec des mots ou un modèle visuel afin de différencier les diverses utilisations des fractions.

Il est utile pour les élèves de reconnaître les diverses possibilités et de faire preuve de souplesse dans l'interprétation des fractions. Il importe donc d'être précis dans le choix des mots relatifs aux relations et concepts associés à la notation fractionnaire (p. ex., partie-tout, partie-partie, fraction comme quotient et fraction comme opérateur). Par exemple, lorsqu'on examine un modèle de surface rectangulaire dans lequel la relation partie-tout de $\frac{3}{2}$ désigne la fraction de la surface qui est ombrée (voir l'exemple ci-dessous), le tout est la surface du rectangle.

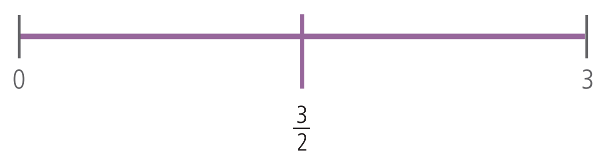
La relation partie-tout $\frac{3}{2}$



Le rectangle complet a été fractionné en demis, et trois de ces régions ont été ombrées. Le dénominateur indique comment le tout a été divisé. Dans ce cas, il a été divisé en demis. Le dénominateur n'est pas le tout; le tout n'est pas 2.

Si l'on considère la fraction $\frac{3}{2}$ comme quotient, 3 (le numérateur) est le tout et 2 (le dénominateur) montre le nombre de parties.

La fraction comme quotient



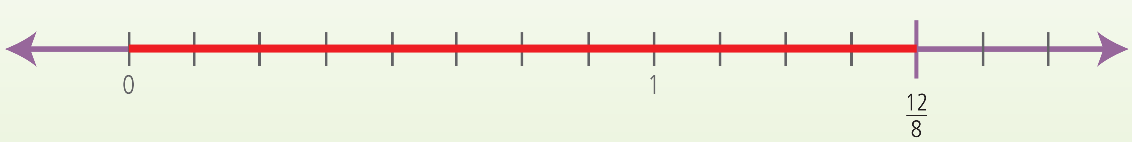
Équivalence

Pour déterminer des fractions équivalentes, les élèves identifient diverses unités fractionnaires pouvant être utilisées pour décrire une quantité (p. ex., $\frac{1}{3} = \frac{5}{15} = \frac{7}{21}$). Il importe que les élèves aient de nombreuses occasions d'utiliser leur raisonnement proportionnel ou spatial pour déterminer avec facilité des fractions partie-tout équivalentes au moyen de modèles plutôt qu'avec un algorithme tel que « doubler le numérateur et le dénominateur ». Les recherches de Moss et Case (1999) montrent clairement qu'une plus grande insistance sur le sens ou la sémantique des nombres rationnels plutôt que sur les procédures servant à les manipuler, ainsi que sur la nature proportionnelle des nombres rationnels, sont des éléments essentiels des programmes permettant d'acquérir une connaissance plus approfondie.

Utilisation d'un modèle de longueur (droite numérique) pour représenter des fractions équivalentes

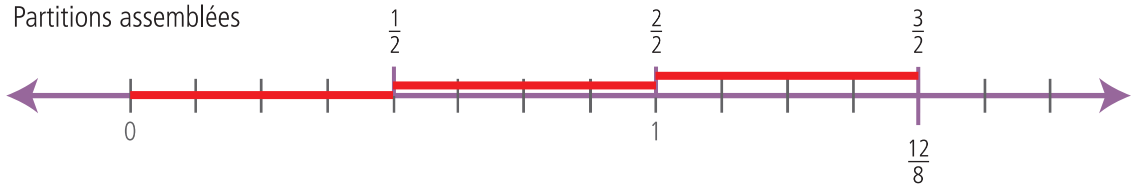
Il est possible de générer un nombre infini de fractions équivalentes.

Soit la fraction $\frac{12}{8}$, qui est représentée sur une droite numérique.



Il existe deux stratégies principales pour générer des fractions équivalentes : assembler des parties et diviser des parties. On assemble des parties pour créer des parties plus grandes et moins nombreuses.

Partitions assemblées

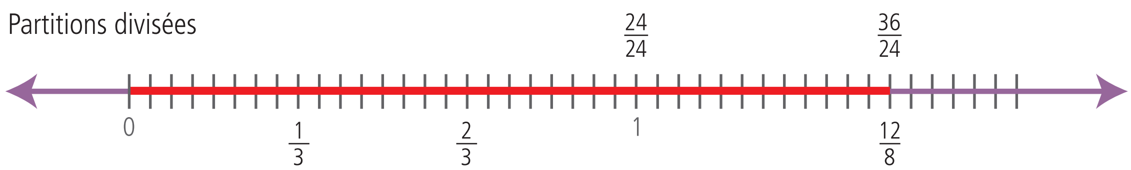


Dans cet exemple, les parties plus grandes sont créées en assemblant quatre unités d'*un huitième* en une unité d'*un demi*. Cette fusion crée trois unités d'*un demi*. *Trois demis* sont équivalents à douze huitièmes.

Dans ce cas, il serait également correct d'assembler deux unités d'*un huitième* en une unité d'*un quart*. Cette fusion générerait la fraction équivalente de *six quarts*.

Avec ce même exemple, nous pouvons fractionner une longueur pour générer une fraction équivalente. Il n'y a pas de limite au nombre de fractionnements que nous pouvons appliquer à une longueur ou une surface, bien qu'un grand nombre de divisions, tel que 24, soit difficile à représenter visuellement. Divisons maintenant chaque part d'*un huitième* en tiers.

Partitions divisées

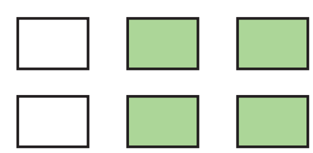


Dans cet exemple, il y a 36 unités d'*un vingt-quatrième* dans 12 unités d'*un huitième*.

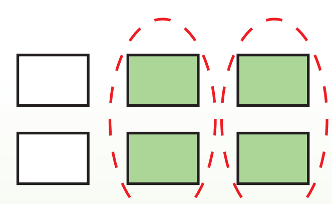
Utilisation d'un modèle d'ensemble pour représenter des fractions équivalentes

On peut assembler et fractionner pour déterminer des fractions équivalentes avec des modèles d'ensemble. Les élèves trouvent cette méthode plus facile si l'ensemble est construit avec des éléments pouvant être coupés ou pliés, tels que des pommes ou des morceaux de papier, contrairement à des billes, des bureaux ou des personnes.

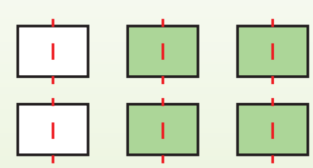
Prenons l'exemple de six morceaux de papier. Les morceaux verts de cet ensemble peuvent être décrits à l'aide de la fraction $\frac{4}{6}$, car *quatre sixièmes* des morceaux sont verts.



Nous pouvons également fusionner ou réorganiser les morceaux de papier pour créer une fraction équivalente. Changer de tiers aux sixièmes comme unité fractionnaire ou encore considérer deux morceaux comme étant une part nous permet de voir que la fraction $\frac{2}{3}$ décrit aussi les morceaux verts de cet ensemble.



Pour créer une fraction équivalente, nous pouvons diviser chaque morceau en des morceaux plus petits de grandeurs égales, par exemple en demis. Si, en fait, nous découpons les morceaux, nous obtiendrons un ensemble de 12 morceaux de papier dont 8 seraient verts. Nous pourrions décrire ceci comme étant $\frac{8}{12}$, ce qui signifie que *huit douzièmes* de l'ensemble des morceaux de papier sont verts. On notera que nous avons augmenté ou diminué le nombre total de morceaux de papier de l'ensemble original, mais que nous avons conservé le tout.



C’est le tout qui compte : examinons ceci

Lorsque nous déterminons des fractions partie-tout équivalentes ou que nous comparons des fractions partie-tout en utilisant des modèles, il est important que le tout soit conservé. La sélection réfléchie de modèles accroît la probabilité que le tout soit conservé lors du fractionnement. Des droites numériques et des modèles de surface rectangulaires constituent d’excellents modèles pour déterminer des fractions équivalentes. Il est important que les élèves puissent aussi vivre l’expérience de déterminer des fractions équivalentes en se servant de modèles d’ensemble, car cela les aidera à comprendre les conséquences de changer le tout.

Prenons l’exemple suivant dans lequel le tout a été changé. Lorsqu’ils déterminent une fraction équivalente pour l’ensemble de morceaux de papier ci-dessus, certains élèves peuvent ajouter des morceaux, de sorte à créer des modèles exacts des fractions $\frac{4}{6}$ (fig. 1) et $\frac{8}{12}$ (fig. 2). Toutefois, bien qu’il soit numériquement vrai que $\frac{4}{6} = \frac{8}{12}$, ce modèle illustre des rapports équivalents plutôt que des fractions équivalentes, car le tout est passé de 6 morceaux de papier à 12.

Figure 1 : Modèle original

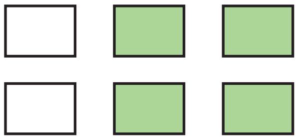
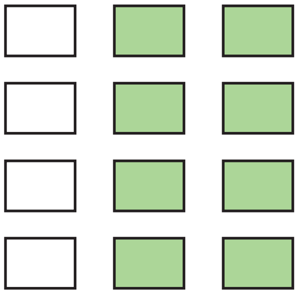


Figure 2 : Modèle avec le tout changé

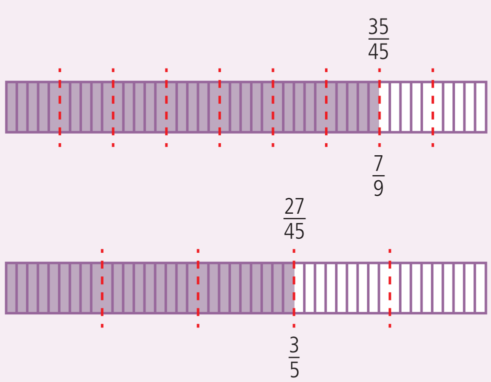


Comment éviter les méprises sur l'équivalence

- Si les élèves sont prématurément ou uniquement exposés à des procédures symboliques pour déterminer des fractions équivalentes, on les empêche d'établir la relation entre ces procédures et des modèles visuels. S'ils ont la chance de faire cette relation, ils pourront établir des liens entre les fractions équivalentes et le raisonnement proportionnel ainsi que les nombres entiers et les nombres décimaux, et ils comprendront des fractions algébriques, telles que $\frac{a}{2b}$, au cours des années ultérieures.
- Il est important d'utiliser un langage précis pour favoriser l'apprentissage des fractions. Soit par exemple la fraction $\frac{4}{6}$. Certains pourraient dire que la fraction équivalente de $\frac{12}{18}$ est obtenue en multipliant le numérateur et le dénominateur par 3. Certains élèves trouveront peut-être que ceci est déroutant, car ils comprennent que la multiplication par 3 est la même chose que de tripler une quantité. Ils pourraient donc considérer que la nouvelle fraction représente trois fois plus que la fraction originale et non pas une quantité équivalente. Mathématiquement, la fraction équivalente est plus correctement un exemple de division de chaque sixième en tiers. Symboliquement, la fraction $\frac{4}{6}$ est multipliée par $\frac{3}{3}$ (qui est équivalent à 1), ce qui donne une fraction équivalente sans que la quantité soit changée. Bien que la distinction puisse sembler banale, elle est essentielle pour les élèves du niveau secondaire lorsqu'ils travaillent avec des expressions algébriques telles que $\frac{a}{2b} + \frac{2}{c}$, et essaient de générer des fractions équivalentes ayant un dénominateur de $2bc$. Ils doivent multiplier le premier terme par $\frac{c}{c}$ tout en se rendant compte que cela ne modifiera pas la valeur de la fraction originale.
- Certains élèves se fient trop à l'algorithme « doubler le numérateur et le dénominateur ». Cette stratégie risque de ne pas être un moyen efficace pour comparer $\frac{7}{9}$ et $\frac{3}{5}$ car le doublement se poursuivrait indéfiniment. Dans le cas d'un élève à qui l'on a demandé quelle était la plus grande des deux quantités, $\frac{7}{9}$ ou $\frac{3}{5}$, le doublement répété des fractions produit ceci :

$$\frac{7}{9} = \frac{14}{18} = \frac{28}{36} = \frac{56}{72} = \frac{112}{144} \qquad \frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{12}{20} = \frac{24}{40} = \frac{48}{80} = \frac{96}{160}$$

  Les ensembles de fractions équivalentes ci-dessus, bien que mathématiquement exacts, ne sont pas du tout utiles si l'on désire faire une comparaison. Mettons ceci en parallèle avec l'élève qui comprend que chacun des neuvièmes peut être lui-même divisé en cinquièmes et que chacun des cinquièmes peut aussi être divisé en neuvièmes de sorte à créer une unité fractionnaire commune de quarante-cinquièmes.



  L'élève peut alors faire un dessin ou visualiser que les fractions équivalentes sont $\frac{35}{45}$ et $\frac{27}{45}$, et conclure que $\frac{35}{45} > \frac{27}{45}$ et donc que $\frac{7}{9} > \frac{3}{5}$, car 35 quarante-cinquièmes est plus grand que 27 quarante-cinquièmes. Cette conclusion lui permet de comprendre que le dénominateur commun représente l'unité fractionnaire commune plutôt que la valeur obtenue par la « multiplication des dénominateurs », qui ne dégage pas les concepts sous-jacents de l'application de la procédure.

  Les élèves peuvent aussi créer des diagrammes précis, qui peuvent être utiles pour comparer et classer des fractions.

Comparer et ordonner

« La compréhension que démontre un enfant pour ordonner deux fractions (déterminer quelles sont les relations égales à, inférieures à ou supérieures à) doit être fondée sur la compréhension pour ordonner des fractions unitaires. » (Behr et Post, 1992, p. 21, traduction libre)

Il existe de nombreuses stratégies efficaces pour comparer et ordonner des fractions autres que déterminer une unité fractionnaire commune, c'est-à-dire un dénominateur commun. Lorsque les élèves comprennent bien les fractions, notamment la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur, ils sont capables d'utiliser le sens du nombre et le raisonnement proportionnel pour faire des comparaisons.

Construction de modèles

Les élèves peuvent construire des modèles de longueur ou de surface raisonnablement exacts de ces fractions en utilisant des rectangles ou des droites numériques pour les comparer.

$1\frac{3}{7}$

$1\frac{5}{9}$

Utilisation de fractions ou de nombres repères

Les élèves peuvent utiliser des fractions ou des nombres repères pour faire des comparaisons. Un élève pourrait par exemple dire : « Je sais que 3 est plus petit que le demi de 7, donc $\frac{3}{7} < \frac{1}{2}$. Je sais aussi que 5 est plus grand que le demi de 9, donc $\frac{5}{9} > \frac{1}{2}$. Je sais donc que $\frac{5}{9} > \frac{3}{7}$. » Ce type de raisonnement démontre une compréhension de la relation multiplicative entre le numérateur et le dénominateur.

> ***Qu'est-ce qu'un repère?***
>
> « Un repère est un élément qui permet de reconnaître ou retrouver une chose ou de comparer une chose à une autre dans un ensemble. » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 99)

Utilisation des numérateurs communs

Une autre stratégie que les élèves peuvent employer pour comparer des fractions est l'emploi de numérateurs communs. Ils peuvent initialement raisonner que dans la comparaison de $\frac{7}{11}$ et $\frac{7}{13}$, les fractions sont équivalentes, car les numérateurs sont identiques. Toutefois, s'ils regardent cette comparaison d'un peu plus près, les élèves réaliseront que des onzièmes sont plus grands que des treizièmes, et donc que 7 onzièmes est la plus grande des deux fractions.

Utilisation de fractions équivalentes

Les élèves peuvent aussi faire appel à leur connaissance des fractions équivalentes pour générer des numérateurs communs afin d'effectuer des comparaisons. Par exemple, lorsqu'ils comparent $\frac{3}{11}$ et $\frac{6}{19}$, les élèves peuvent se rendre compte que $\frac{6}{22}$ est égal à $\frac{3}{11}$. Ils peuvent utiliser la stratégie des numérateurs communs pour déterminer que $\frac{3}{11} < \frac{6}{19}$. On notera que, dans cet exemple, déterminer une fraction équivalente implique des calculs plus simples (que l'on peut donc effectuer mentalement) que déterminer un dénominateur commun.

Utilisation de fractions unitaires

Lorsque les élèves comparent des fractions telles que $\frac{10}{11}$ et $\frac{12}{13}$, ils peuvent se rendre compte que l'écart entre le numérateur et le dénominateur est dans les deux cas une unité fractionnaire de 1. Ils peuvent ensuite raisonner que des treizièmes sont plus petits que des onzièmes, et que la partie manquante du tout partagée en treizième est plus petite, ce qui signifie que $\frac{12}{13}$ est plus proche de 1 et par conséquent est supérieur à $\frac{10}{11}$.

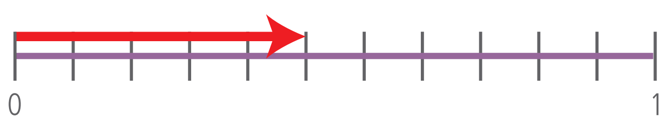
Opérations sur des fractions

« Sans la compréhension conceptuelle de l'équivalence, de l'estimation, des fractions unitaires et des relations partie-tout, les élèves éprouvent de la difficulté à faire des calculs avec des fractions » (Bruce, Chang, Flynn et Yearley, 2013, p. 17, traduction libre). Lorsque les élèves développent les concepts des fractions selon diverses approches signifiantes, ils développent une compréhension implicite des opérations d'addition, de soustraction, de division et de multiplication. Ces expériences commencent au cycle primaire, comme nous l'avons vu précédemment dans ce document, et se poursuivent tout au long des cycles moyen, intermédiaire et supérieur, dans lesquels on présente normalement aux élèves des algorithmes formels de ces opérations. Dans les mathématiques du secondaire, ces concepts fondamentaux sont transférés ou appliqués aux expressions algébriques et aux applications de fraction dans des contextes tels que les rapports trigonométriques, les mesures des radians (p. ex., $\frac{2}{3}\pi$) et les probabilités.

Portons notre attention sur l'apprentissage implicite avant d'aborder les algorithmes formels. Lorsque les élèves décomposent une fraction partie-tout en fractions unitaires, ils utilisent souvent une phrase mathématique d'addition pour communiquer leur pensée.

Par exemple, un élève peut se rendre compte que $\frac{5}{11}$ peut être :

- représenté sous la forme :

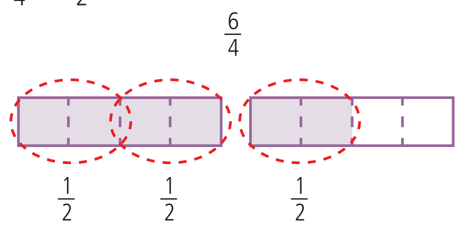


- composé en dénombrant « 1 *onzième*, 2 *onzièmes*, 3 *onzièmes*, 4 *onzièmes*, 5 *onzièmes* »
- écrit sous la forme $\frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} + \frac{1}{11} = \frac{5}{11}$
- décrit à l'aide des expressions « cinq fois *un onzième* » ou « 5 *un onzième* ».

Ces liens permettent aux élèves de développer une compréhension du rôle du numérateur (dénombrement) et du dénominateur (unité fractionnaire) et de voir que pour l'addition comme pour la multiplication, l'unité fractionnaire est conservée. Le curriculum en mathématiques de l'Ontario identifie diverses occasions de présenter et de développer ces types de liens depuis le primaire jusqu'au secondaire (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, 2005b). Ces possibilités offrent une base solide sur laquelle les algorithmes peuvent être développés et appliqués.

De même, la décomposition d'une fraction partie-tout peut s'exprimer à l'aide de phrases mathématiques de soustraction et de division. Prenons l'exemple de $\frac{6}{4}$. Les élèves peuvent dire que $\frac{6}{4} - \frac{4}{4} = \frac{2}{4}$.

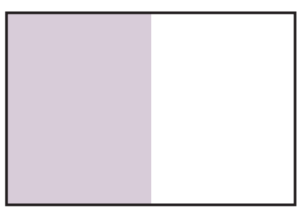
Ils peuvent aussi représenter cette égalité au moyen d'une illustration (voir ci-dessous) et indiquer que $\frac{6}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ou que $\frac{6}{4} \div \frac{1}{2} = 3$ ou que « *un demi* entre trois fois dans *six quarts* ».



Les jeunes élèves raisonnent à l'aide de fractions présentées comme opérateur ou de multiplications par une fraction pour résoudre des problèmes de partage égal, comme par exemple déterminer $\frac{1}{3}$ du volume d'un pichet ou $\frac{3}{5}$ de l'aire de la surface d'une figure. Les élèves plus âgés transfèrent ou appliquent cette connaissance pour résoudre des problèmes tels que : « Il restait $\frac{1}{2}$ d'une lasagne. Mon papa a mangé $\frac{2}{3}$ du reste de la lasagne, et ma sœur l'a terminée. Quelle fraction du tout ma sœur a-t-elle mangée? » Pense à ce que tu visualises en lisant ce problème. Comment peux-tu le résoudre à l'aide de l'imagerie mentale plutôt qu'au moyen d'un algorithme?

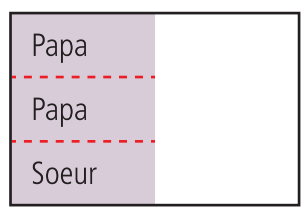
Ton image mentale était :

une demi-lasagne

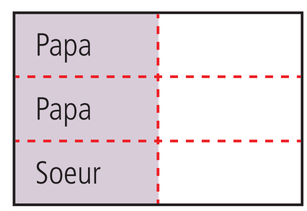


puis ceci :

deux tiers et un tiers



et enfin ceci :



pour obtenir la réponse de $\frac{1}{6}$.

Si tu devais résoudre ce problème au moyen d'un algorithme, il te faudrait d'abord identifier la partie de la moitié de la lasagne que la sœur a mangée, soit $\frac{1}{3}$. Tu devrais ensuite réaliser que la question est « Quelle partie du tout est représentée par $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$? » L'expression deviendrait $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$, et tu pourrais trouver la réponse de $\frac{1}{6}$. Certains peuvent considérer que résoudre l'équation $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = x$ est plus compliqué qu'obtenir une réponse avec une illustration ou une représentation concrète.

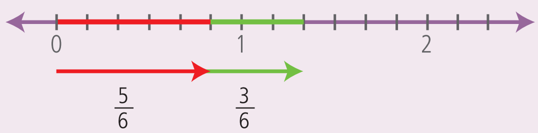
Il est important de comprendre la relation représentée par la fraction dans une opération pour effectuer cette opération, ainsi que le montrent les exemples suivants.

Partie-tout

Le dénominateur est l’unité fractionnaire. L’unité fractionnaire n’est pas modifiée en cas d’addition ou de soustraction.

Un jour, j’ai marché pendant $\frac{5}{6}$ heures et le lendemain j’ai marché pendant $\frac{3}{6}$ heures. Pendant combien de temps ai-je marché en tout?

Ceci pourrait être modélisé au moyen d’une droite numérique.



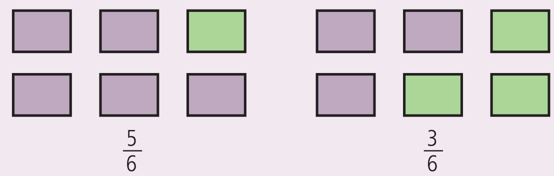
J’ai marché pendant $1\frac{2}{6}$ heures.

Partie-partie

Le numérateur et le dénominateur sont des parties d’un tout. Dans ce cas, l’unité fractionnaire est modifiée par l’addition et/ou la soustraction.

Un jour, j’ai réussi $\frac{5}{6}$ des sauts avec ma bicyclette. Le jour suivant, j’ai réussi $\frac{3}{6}$ des sauts. Quel a été mon taux de réussite général des sauts?

Cela pourrait être modélisé à l’aide de carreaux de couleur.



J’ai réussi $\frac{8}{12}$ des sauts.

Comment pouvons-nous encourager à penser en termes de fractions?

Les résultats de la recherche indiquent clairement que les élèves améliorent leur compréhension des fractions grâce à des stratégies pédagogiques ciblées plutôt qu’à un accroissement du temps consacré à apprendre les fractions (Watanabe, 2012). Conséquemment, les enseignants ont à faire une sélection réfléchie et intentionnelle des ressources et des occasions d’apprentissage afin de maximiser l’apprentissage.

Les stratégies suivantes s’appliquent non seulement lorsque les élèves sont initialement exposés aux fractions, mais aussi lorsque de nouveaux concepts sont présentés, tels que les opérations sur les fractions, et lorsque des fractions sont utilisées dans de nouveaux contextes, par exemple en trigonométrie et dans l’étude des relations et des fonctions.

Les exemples de stratégies proposées sont classés en fonction des concepts clés suivants :

- fractions unitaires
- représentations
- équivalence et comparaison
- opérations

Fractions unitaires

- Mettre l'accent sur les fractions unitaires pour développer un sens des nombres fractionnaires. Les élèves devraient :
  - dénombrer en fractions unitaires (en commençant à 0 et en poursuivant au-delà de 1) pour développer un sens de la fraction en tant que nombre, du rôle du numérateur et du dénominateur, et de la relation entre le numérateur et le dénominateur;
  - assembler et décomposer des fractions en fractions unitaires;
  - développer une compréhension des fractions repères. Les très jeunes élèves possèdent souvent une compréhension intuitive de repères courants, tels qu'*un demi*, *un tout*, *un et demi*. À mesure qu'ils se familiarisent avec un plus grand nombre de fractions, ils devraient développer un bagage de fractions repères et s'y reporter, incluant des fractions équivalentes aux fractions repères les plus courantes.
- Demander aux élèves de fractionner des figures en parties équivalentes et d'identifier, dès le début, des fractions de modèles de surface et d'ensemble plutôt que de leur donner des figures déjà divisées.
- Faire découvrir simultanément des fractions propres et des nombres fractionnaires. Les jeunes élèves se rendent compte que ces deux types de fractions sont des contextes de fractionnement en parties équivalentes et cette constatation favorise le développement de la formulation de généralisations correctes.
- Utiliser un langage précis. À moins qu'une relation partie-partie soit spécifiquement mentionnée comme un rapport partie à partie (p. ex., 5 à 4), toutes les fractions devraient être lues comme des nombres. Par exemple, $\frac{5}{4}$ signifie *cinq* quarts et non pas :
  - *cinq sur quatre*, qui amène les élèves à penser à l'organisation physique des nombres ou
  - *cinq de quatre*, qui ne favorise pas la compréhension d'une fraction comme étant un seul nombre.

  Les élèves du secondaire devraient aussi comprendre que les fractions représentent un nombre dans des contextes tels que des expressions algébriques et des mesures de radians. La fraction $\frac{5}{4}x$ peut se présenter sous la forme $\frac{5x}{4}$, mais devrait être exprimée oralement sous la forme *cinq x quarts* ou *cinq quarts de x* plutôt que « 5*x* sur 4 ». De même, $\frac{5}{4}\pi$ devrait être exprimé sous la forme *cinq quarts de* π plutôt que « cinq π divisé par quatre ».

Représentations

- Faire découvrir la représentation symbolique en même temps que les représentations visuelles, tel que l'on fait avec les nombres entiers.
- Utiliser des représentations qui seront constantes d'une année à l'autre et dans divers contenus, tels que des modèles de longueur (droites numériques), des modèles de surface (rectangles) et des modèles de volumes (solides). Du matériel de manipulation structuré, tel que des bandes fractionnaires et des réglettes, est aussi utile.
- Construire un nouveau concept avec une représentation familière et faire ressortir une nouvelle représentation à l'aide d'un concept avec lequel les élèves sont déjà familiers. Par exemple, utiliser une droite numérique avec les élèves du primaire pour présenter les fractions unitaires pour la première fois, car ils sont déjà habitués à représenter les nombres entiers avec la droite numérique. Représenter ensuite les mêmes fractions unitaires en présentant un nouveau modèle, tel qu'un rectangle (modèle de surface).

- Utiliser des représentations continues telles que des modèles de surface, de volume et de longueur (droites numériques), et des représentations discrètes (modèles d'ensembles) pour représenter des relations partie-tout et partie-partie.
- Éviter d'utiliser des cercles aux cycles primaire et moyen pour la représentation des fractions. Cette représentation nécessite que les élèves comprennent l'aire de la surface d'un cercle, ce qui est un contenu du curriculum du cycle intermédiaire. En outre, un cercle ne peut pas facilement être partagé en parties équivalentes correspondant à des fractions autres que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ et peut-être $\frac{1}{3}$ (car les élèves voient souvent cette fraction représentée au moyen d'un cercle).

Équivalence et comparaison

- Demander aux élèves d'effectuer des tâches dans lesquelles ils doivent déterminer des fractions équivalentes par fractionnement et assemblage en utilisant des modèles avant de présenter une procédure symbolique.
- Permettre aux élèves d'interroger l'équivalence des fractions en modifiant les touts, afin qu'ils apprennent à considérer le tout, le numérateur et le dénominateur lorsqu'ils comparent des fractions.
- Aider les élèves à établir des relations avec d'autres ensembles de nombres pour trouver des équivalences, par exemple avec des nombres entiers et des nombres décimaux ($\frac{12}{2} = 6$; $\frac{12}{5} = 2{,}4$).

Opérations

- Renforcir la compréhension intuitive des élèves des opérations sur les nombres entiers, telles qu'elles ont été explorées dans les cycles primaire et moyen. Les élèves apprennent tôt que l'addition ne peut être effectuée qu'avec des quantités dont les unités sont identiques, par exemple, un dollar plus un cent ne donnent pas deux, car les unités sont différentes.
- S'assurer que l'acquisition d'habiletés en calcul repose sur l'acquisition d'un sens des opérations (voir le Guide d'enseignement efficace des mathématiques, NSN, fascicule 2, Fractions, p. 74 à 102) plutôt qu'une série de règles qu'il faut apprendre et maîtriser.

Les fractions à travers les domaines et les années d'études

Dans plusieurs conseils scolaires, les enseignants participant à la recherche-action sur l'enseignement et l'apprentissage des fractions ont identifié les effets positifs sur la compréhension des élèves de l'exploration continue des fractions tout au long de l'année scolaire plutôt que dans le cadre d'une unité ou d'un module spécifique. (Pour en savoir plus à ce sujet, voir *Results of Collaborative Action Research on Fractions, 2011–2012* de Flynn, McPherson et Yearley dans le document numérique Professional Learning about Fractions pouvant être consulté à www.edugains.ca.). Un enseignement continu permet aux enseignants d'être attentifs à la pensée et au raisonnement des élèves lorsqu'ils planifient des activités et permet aux élèves d'établir une relation entre leur connaissance des fractions et l'apprentissage d'autres concepts mathématiques. De cette façon, les enseignants se concentrent sur l'apprentissage des concepts clés relatifs aux fractions tels que les fractions unitaires, et donnent suffisamment de temps aux élèves pour exécuter une ou plusieurs tâches reliées.

Un exemple de tâche de mathématiques qui implique des fractions à travers les domaines et les années d'études est donné dans la section *Établir des liens*, Guide d'enseignement efficace des mathématiques, NSN, fascicule 2, Fractions, aux pages 103 à 110.

Bien que le curriculum soit précis sur les contenus que les élèves doivent comprendre chaque année, les enseignants qui possèdent une compréhension approfondie de tous les contenus seront non seulement capables de mieux déterminer comment les concepts et les relations relatifs aux fractions sont incorporés dans le curriculum de mathématiques de l'Ontario (voir la figure 3), mais ils seront aussi plus aptes à identifier une pensée mathématiquement correcte mais inattendue des élèves dans le contexte d'un apprentissage donné. Cette compréhension permettra aux enseignants d'aider les élèves à établir une relation entre leurs connaissances et les résultats d'apprentissage recherchés.

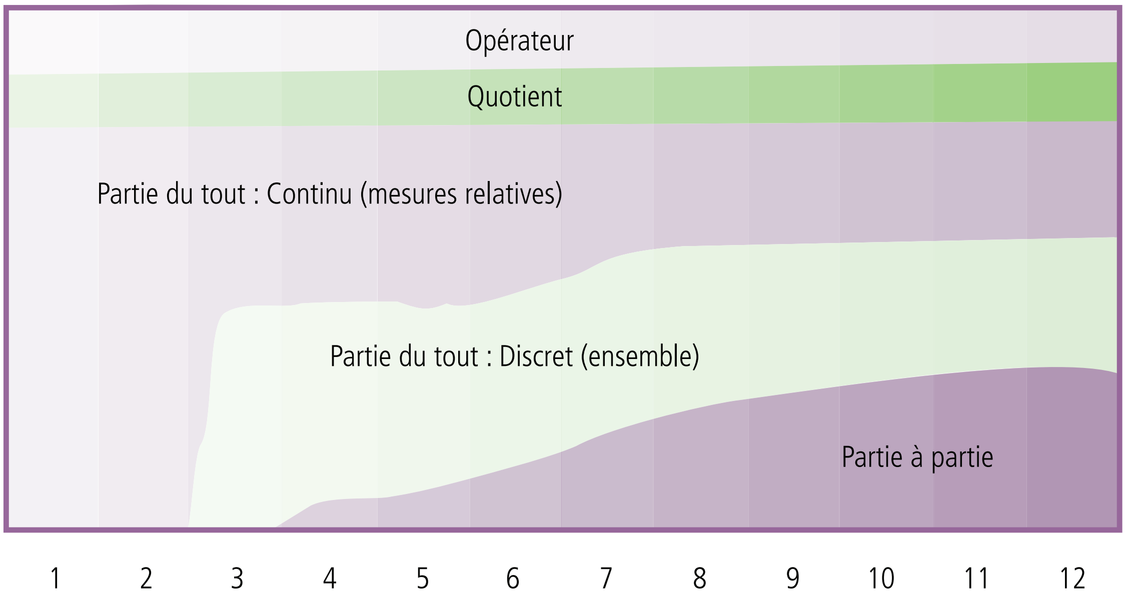


Fig. 3 : Exploration des constructions de fraction de la 1re à la 12e année

Des couleurs ont été utilisées dans le graphique pour indiquer où l'enseignement de chaque concept ou relation relatifs aux fractions est incorporé dans le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 12e année (établi à partir du document du ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a.)

Ressources du ministère

Recherche sur les fractions (ces ressources sont disponibles en anglais seulement)

Document numérique Professional Learning About Fractions: A Collaborative Action Research Project

Cet article documente la démarche d'apprentissage de la recherche participative en Ontario et les leçons qui en ont été tirées, et il identifie des pratiques efficaces dont il sera possible de tirer parti lors de la conception et du développement de ressources. Il comprend des résumés de recherche, et de nombreuses leçons et vidéos. (Sur le site Web EduGAINS, voir *Professional Learning … about Fractions*.)

http://www.edugains.ca/newsite/DigitalPapers/fractions/fractions.html

Foundations to Learning and Teaching Fractions: Addition and Subtraction

Cette revue de littérature synthétise les connaissances existantes dans le domaine de la recherche pédagogique sur l'enseignement et l'apprentissage des fractions (sur le site Web EduGAINS, voir *Professional Learning … about Fractions*.)

http://www.edugains.ca/resourcesDP/Resources/PlanningSupports/FINALFoundationstoLearningandTeachingFractions.pdf

Math Teaching for Learning

Il s'agit de résumés d'une page des apprentissages clés présentés dans *Foundations to Learning and Teaching Fractions: Addition and Subtraction*. Ces résumés sont notamment : Developing Fraction Number Sense; Purposeful Representations; Developing Proficiency with Partitioning, Iterating and Disembedding; Building Understanding of Unit Fractions; et Building to Addition and Subtraction of Fractions. (Sur le site Web EduGAINS, voir *Professional Learning … about Fractions*.)

Math for Teaching: Ways We Use Fractions http://www.edugains.ca/resourcesDP/Resources/PlanningSupports/mathforTeachingWaysWeUseFractions.pdf

Math Teaching for Learning: Developing Fraction Number Sense http://www.edugains.ca/resources/ProfessionalLearning/Fractions_OnePageSynopses/Fractions_DevelopingNumberSense.pdf

Math Teaching for Learning: Purposeful Representations http://www.edugains.ca/resources/ProfessionalLearning/Fractions_OnePageSynopses/Fractions_Representations.pdf

Math Teaching for Learning: Developing Proficiency with Partitioning, Iterating and Disembedding

http://www.edugains.ca/resources/ProfessionalLearning/Fractions_OnePageSynopses/Fractions_IteratingandPartitioning.pdf

Math Teaching for Learning: Building Understanding of Unit Fractions http://www.edugains.ca/resources/ProfessionalLearning/Fractions_OnePageSynopses/Fractions_UnitFractions.pdf

Math Teaching for Learning: Building to Addition and Subtraction of Fractions

http://www.edugains.ca/resources/ProfessionalLearning/Fractions_OnePageSynopses/Fractions_AdditionandSubtraction.pdf

Results of Collaborative Action Research on Fractions (2011–2012) – Projet du Réseau d'échange des connaissances pour la recherche appliquée en éducation http://www.edugains.ca/resourcesDP/Resources/PlanningSupports/resultsOfActionResearchOnFractions.pdf

Autres ressources pour les fractions : http://www.edugains.ca/newsite/DigitalPapers/fractions/resources.html

Documents de la série Mettre l'accent sur

Qu'est-ce que le raisonnement proportionnel? M-12

Document d'appui pour Mettre l'accent sur l'enseignement des mathématiques, ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2012. http://www.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentsuccess/ProportionReasonFr.pdf

Mettre l'accent sur le raisonnement proportionnel (Adobe Presenter)

Aperçu du document Mettre l'accent sur le raisonnement proportionnel dans le format Adobe Presenter, ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2012.

http://www.edugains.ca/resourcesLNS/MathematicsFoundationalPrinciples/ProportionalReasoning_AP/index.htm

Mettre l'accent sur le raisonnement spatial

Document d'appui sur l'importance de l'enseignement des mathématiques de la maternelle à la 12e année, ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2014.

http://www.edu.gov.on.ca/fre/literacynumeracy/SpatialReasoningFr.pdf

Webémissions (disponibles en anglais seulement)

Planning for Mathematical Understanding: Fractions across the Junior Grades

Cette webémission documente la démarche des enseignants du cycle moyen durant la planification et l'enseignement d'un module sur les fractions. (Sur le site Web EduGAINS, voir *Resource Collections; Webcasts*.)

http://learnteachlead.ca/en/projects/planning-for-understanding-in-mathematics-fractions-across-the-junior-grades

Learning Mathematics within Contexts

Mme Cathy Fosnot et un groupe d'étude sur les mathématiques composé d'enseignants de l'Ontario explorent l'équivalence dans une salle de classe de la 6e année.

http://learnteachlead.ca/en/projects/learning-mathematics-within-contexts

Guides pour un enseignement efficace

Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année, Numération et sens du nombre, Fascicule 2, fractions, ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2009.

http://www.atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE_math_M_6_fasc2.pdf

Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année, Modélisation et algèbre, ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008.

http://www.atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE_math_MA_456.pdf

Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 3e année, Numération et sens du nombre, ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005.

http://www.atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE_math_M_3_NSN.pdf

Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 3e année, Traitement des données et probabilité, ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2009.

http://www.atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE_math_M_3_TDP.pdf

Ressources numériques pour les élèves (disponibles en anglais seulement)

Fractions – Exploration des relations partie-tout

Ce site propose une gamme d'activités interactives, de jeux, de tests et d'outils d'apprentissage avec rétroaction.

http://oame.on.ca/mathies/activities.html

Outils d'apprentissage

Ce site héberge un ensemble d'outils numériques pour l'exploration des concepts de fraction : bandes de fraction, blocs, contenants de liquide. http://oame.on.ca/mathies/learningTools.php

Pratique en ligne pour combler les lacunes

Cette série d'activités mathématiques interactives numériques propose des pratiques avec rétroaction et amène à comprendre les fractions. www.epractice.ca

Bibliographie

Behr, M. et Post, T. (1992). Teaching rational number and decimal concepts. Dans T. Post (éd.), *Teaching Mathematics in grades K–8: Research-based methods* (2e éd., pp. 201–248). Boston, MA: Allyn and Bacon

Bruce, C., Chang, D., Flynn, T. et Yearley, S. (2013). *Foundations to learning and teaching fractions: Addition and Subtraction*. http://www.edugains.ca/resources/ProfessionalLearning/FoundationstoLearningandTeachingFractions.pdf

Bruce, C., Flynn, T., McPherson, R. & Yearley, S. (2012). *Results of collaborative action research on fractions (2011–2012)*. http://www.edugains.ca/resourcesDP/Resources/PlanningSupports/resultsOfActionResearchOnFractions.pdf

Empson, S. et Levi, L. (2011). *Extending children's mathematics: Fractions and decimals: Innovations in cognitively guided instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Litwiller, B. H. et Bright, G. W. (2002). *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 yearbook*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Moss, J. et Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 122–147.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2005a). *Le curriculum de l'Ontario 1re à la 8e année Mathématiques*. Toronto, ON : Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2005b). *Le curriculum de l'Ontario 9e et 10e année Mathématiques*. Toronto, ON : Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2007). *Le curriculum de l'Ontario 11e et 12e année Mathématiques*. Toronto, ON : Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Ministère de l'Éducation de l'Ontario. (2010). *Programme d'apprentissage à temps plein de la maternelle et du jardin d'enfants*, Toronto,ON : Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Orpwood, G., Schollen, L., Leek, G., Marinelli-Henriques, P., et Assiri, H. (2012). *College mathematics project 2011: Final report*. http://collegemathproject.senecac.on.ca/cmp/en/pdf/FinalReport/2011/CMP_2011_Final_Report%20-%2002Apr12%20pmh.pdf

Petit, M., Laird, R., et Marsden, E. (2010). *A focus on fractions*. New York, NY: Routledge.

Watanabe, T. (2012, Octobre). Thinking about learning and teaching sequences for the addition and subtraction of fractions. Dans C. Bruce (prés.), *Think Tank on the Addition and Subtraction of Fractions*. Groupe de réflexion conduit à Barrie, Ontario.

Pour obtenir des exemplaires supplémentaires, communiquez avec ServiceOntario au 416 326-5300 ou au 1 800 668-9938 ou rendez-vous au http://www.publications.serviceontario.ca/ecom

Imprimé sur du papier recyclé
ISBN 978-1-4606-4574-1 Imprimé
ISBN 978-1-4606-4575-8 PDF