Monographie de recherche nº 64
Avril 2016

Les mathématiques : la zone entre la modélisation directe et la compétence

Par Alex Lawson, Ph.D., Université Lakehead

Pistes pour soutenir l'enseignement des faits numériques

1. Reconnaître que l'apprentissage des faits numériques est un aspect fondamental de la réussite ultérieure en mathématiques et des habiletés intellectuelles.
2. Soutenir les stratégies de calcul de plus en plus sophistiquées plutôt que de sauter à la mémorisation.
3. Proposer des problèmes bien construits pour guider cette progression et encourager les stratégies personnelles des élèves.
4. Avoir recours à la mémorisation pour effectuer des calculs de façon efficace seulement lorsque les stratégies de raisonnement sont bien acquises par les élèves.

Le potentiel d'apprentissage qui existe dans la zone située entre la modélisation directe et la mémorisation des faits est un aspect fondamental de la réussite ultérieure en mathématiques et des habiletés intellectuelles. De quelle façon les élèves devraient-ils apprendre les mathématiques?

Au cours des dernières années, il y a eu un tollé médiatique au sujet du prétendu manque de maîtrise des faits numériques et le prétendu désintéressement des enseignants de faire en sorte que les élèves les mémorisent, comme l'indique cet extrait du *Guelph Mercury* :

> La bureaucratie de l'éducation a longtemps eu un mépris pour les méthodes d'enseignement qui mettent l'accent sur les « faits numériques », comme les tables de multiplication et l'arithmétique simple, comme 7 + 8 = 15... Au lieu de cela, les écoles de l'Ontario utilisent surtout l'enseignement par la « découverte des mathématiques », qui permet aux élèves d'explorer les concepts en fonction de leur propre style d'apprentissage personnel.[1]

Bien que ces dichotomies fassent bonne presse, elles déforment la situation. La plupart des enseignants croient que *tous* les élèves devraient apprendre les faits numériques. Toutefois, ils croient également que les élèves *devraient* apprendre et comprendre beaucoup plus les mathématiques. Il ne suffit plus de mémoriser les faits. En fait, cela ne l'a jamais été.

Pratique passée

Nombre d’entre nous avons appris les faits numériques à l’aide de la modélisation directe – habituellement avec des objets concrets.[2] Pour additionner 5 + 7, par exemple, on pouvait :

1. compter un premier groupe de cinq objets;
2. compter un deuxième groupe de sept objets;
3. compter à nouveau de 1 à 12 (c.-à-d., la stratégie qui consiste à compter tout).

Une fois que nous maîtrisions cette méthode d’addition, nous avions mémorisé 5 + 7 = 12 sous la forme d’un fait isolé.

Malheureusement, ce passage rapide de la modélisation directe à la mémorisation a eu des conséquences pour de nombreux élèves.[3,4] Le potentiel d’apprentissage qui existe entre la modélisation directe et la mémorisation des faits est un aspect fondamental de la réussite ultérieure en mathématiques et des habiletés intellectuelles.

Quelles mathématiques se situent entre la modélisation directe et la mémorisation?

Avec le temps, les élèves adoptent une série de stratégies personnelles de plus en plus sophistiquées afin de résoudre les calculs et ils apprennent souvent les mathématiques qui les servent dans la classe et au-delà. Dans les classes, où les enseignants favorisent l’adoption de stratégies d’addition et de soustraction de plus en plus sophistiquées, les méthodes utilisées par les élèves reflètent trois phases générales de progression avant qu’ils ne deviennent compétents.[2,5]

Phase 1 : Modélisation directe et calcul. Considérez notre calcul précédent, 5 + 7. Au cours de cette phase, les élèves utilisent des stratégies, comme celle qui consiste à compter tout (décrites ci-dessus). De là, les élèves commencent à s’éloigner de la modélisation complète du problème.

Phase 2 : Compter plus efficacement. Les élèves utilisent des stratégies, comme celle qui consiste à compter des objets concrets à partir de 5, afin d’indiquer 6, 7, et ainsi de suite, en levant un doigt pour indiquer chaque nombre et tracer une droite numérique mentale jusqu’à ce qu’ils aient sept doigts levés. Ce faisant, ils passent du calcul d’un modèle direct (concret) du deuxième nombre, à un calcul mental de la séquence de nombres. Leurs doigts ne sont plus des objets physiques qui servent à compter, mais, plutôt, un mécanisme permettant simultanément de « compter les nombres »[6] et d’en faire le suivi.

Phase 3 : Travailler avec les nombres. Cette phase illustre les avantages mathématiques d’aider les enfants à évoluer au chapitre des méthodes de calcul par rapport à la mémorisation rapide des faits, alors que les élèves commencent à travailler avec des nombres plutôt que de les compter. Dans un premier temps, ils peuvent utiliser une certaine forme de dédoublement (stratégie des doubles).[7] Par exemple, pour déterminer 5 + 7, certains élèves vont fractionner le 7 afin d’ajouter un 1 au 5, transformant l’expression en 6 + 6, un « double » qu’ils connaissent. Sur le plan du calcul, ils pensent comme ceci : « 5 + (1 + 6) = (5 + 1) + 6 » en tirant parti de la propriété associative de l’addition afin de transformer les nombres en quelque chose qu’ils connaissent.[8] Même si les élèves ne peuvent pas connaître le nom de la propriété, ils savent qu’en morcelant les termes et en les réunifiant ils arriveront à la même somme, ou que a + (b + c) = (a + b) + c. Il s’agit des premiers éléments du fondement de la pensée algébrique.

Avec le soutien pédagogique de leur enseignante ou de leur enseignant, et en ayant recours à un certain nombre d’autres stratégies de plus en plus sophistiquées, les élèves peuvent plus tard apprendre à décomposer des nombres afin d’additionner à l’aide de la stratégie qui consiste à compter au-delà de dix (point d’ancrage 10). Avec l’exemple de 5 + 7, ils peuvent inverser les termes : pour additionner 7 + 5, ils peuvent d’abord additionner 3 (à partir du 5) au 7 pour arriver à 10, puis additionner le 2 qui reste afin d’obtenir 12 (voir la figure 1).

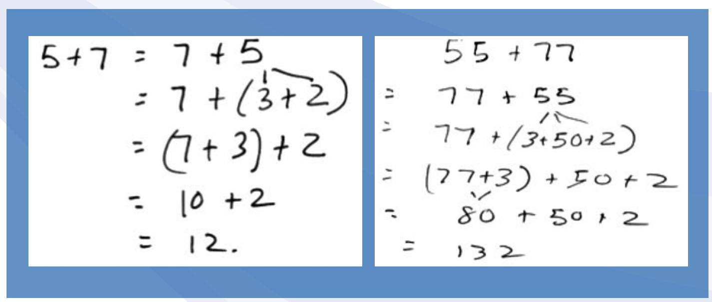

Figure 1 : La stratégie qui consiste à compter au-delà de dix (point d’ancrage 10) pour une addition de nombres à 1 chiffre ou à 2 chiffres.

Plus tard, lorsque les élèves ont recours à ces stratégies, comme celle qui consiste à compter au-delà de dix pour résoudre l’addition 5 + 7 = 12 avec rapidité et facilité, certains mémoriseront l’équation en tant que fait, tandis que d’autres auront besoin de courts exercices ciblés.[9]

Ce qui est tout aussi important, ces élèves auront jeté les bases de l'apprentissage ultérieur des mathématiques, comme les généralisations algébriques (a + b = b + a) et l'efficacité stratégique (décomposer le deuxième terme pour obtenir un dix, et additionner le reste ensuite).

Plus tard, ces élèves peuvent utiliser la même stratégie avec des calculs à deux chiffres. Par exemple, pour calculer 55 + 77, ils peuvent interchanger les termes afin de commencer par 77; ils peuvent aussi décomposer le 55, additionner 3 pour atteindre la dizaine la plus rapprochée (80), additionner 50, et additionner le 2 qui reste pour obtenir 132 (voir la figure 1).

La soustraction et les racines de l'algèbre et l'amélioration de l'efficacité

C'est avec les stratégies de soustraction que nous voyons plus clairement les fondements des futures mathématiques. Considérons 14 - 8. Dans un premier temps, comme pour l'addition, les élèves compteront à trois reprises en comptant d'abord 14 objets, ils en soustrairont 8, et ils recompteront les objets restants pour obtenir 6 (compter tout). Alors que les élèves passent à la phase suivante, ils peuvent éventuellement utiliser la stratégie qui consiste à additionner pour soustraire. (La figure 2 illustre les deux stratégies.)

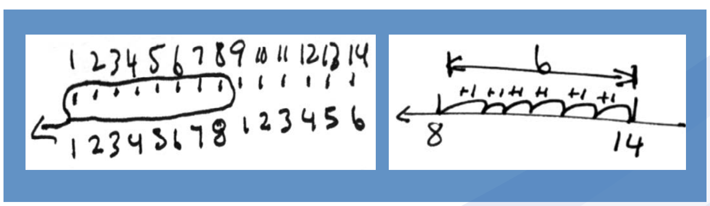

Figure 2 : La soustraction par retrait (à gauche) et la soustraction indiquant la distance entre les nombres (à droite)

Plutôt que de penser simplement que la soustraction est un retrait, ces élèves commencent maintenant à penser à la distance entre deux nombres.[8] Cela reflète une compréhension profondément différente de la soustraction, et elle est fondamentale dans le développement du calcul mental plus efficace. Les élèves qui comprennent la soustraction comme une distance entre les nombres peuvent résoudre des calculs de soustraction par l'addition. Ils peuvent également résoudre les calculs de soustraction en maintenant la distance (différence) tout en transposant des nombres mentalement afin d'atteindre la dizaine la plus rapprochée. Par exemple, le calcul 54 - 18 peut être modifié en y ajoutant 2 afin que le calcul de 56-20 soit plus facile (voir la figure 3).

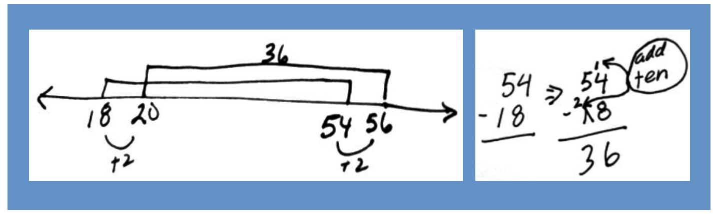

Figure 3 : Résoudre 54 – 18 en utilisant la différence constante (à gauche) et l'algorithme de soustraction traditionnel britannique (à droite)

Avec l'aide continue de l'enseignante ou de l'enseignant, les élèves seront en mesure d'utiliser cette stratégie de différence constante afin de comprendre, par exemple, pourquoi fonctionne le souvent mystérieux algorithme de soustraction traditionnel britannique (qui uniformise cette stratégie). Ils seront plus aptes à déterminer pourquoi l'ajout de dix au nombre le plus élevé et l'ajout de dix au nombre le plus bas vous permettront d'obtenir la même différence, à savoir, 54 – 18 = (54 + 10) – (18 + 10).

Ce ne sont là que quelques exemples des connaissances et des stratégies que les élèves peuvent utiliser en mathématiques afin d'améliorer leur efficacité s'ils évoluent vers une utilisation de méthodes de calcul de plus en plus efficaces plutôt que de simplement recourir à la mémorisation. Cela dit, une autre affirmation présentée dans le commentaire d'ouverture doit être abordée.

Les élèves inventent-ils leurs propres méthodes de calcul?

Dans les classes efficaces, on doit répondre oui et non. Nous avons de plus en plus de preuves qui indiquent que les enseignants dont les classes atteignent un degré le plus élevé d'apprentissage ont eu recours à une méthode de « découverte guidée » bien exécutée pour l'apprentissage des faits,[10] plutôt que l'enseignement explicite (ce que la plupart d'entre nous avons connu) ou la découverte des mathématiques (dont l'éditorialiste du *Guelph Mercury* a discuté). Dans les classes où la méthode de la découverte guidée est utilisée efficacement, on peut entendre des conversations comme celle reproduite ci-dessous.

Enseignante : Ton amie Natalie a 5 bonbons et tu lui en donnes 7 autres. Combien en a-t-elle maintenant?
Élève : 12.
Enseignante : As-tu utilisé la même stratégie la dernière fois?
Élève : Oui, j'ai compté les bonbons.
Enseignante : Tu aimes cette stratégie?
Élève : Oui, je l'ai inventée. Mes amies s'en servent en classe.[11]

L'élève croit qu'elle a inventé la stratégie de dénombrer des objets concrets et elle souligne avec fierté que ses camarades de classe l'utilisent également. Cette invention a été, bien sûr, guidée. L'enseignante a créé un scénario de problème dans le cadre duquel les élèves étaient plus susceptibles de développer et d'utiliser cette stratégie (le premier terme était caché), et lorsque la stratégie est apparue, l'enseignante l'a soulignée et elle a travaillé avec les élèves qui étaient prêts à l'utiliser. Elle connaissait le continuum des stratégies, allant des stratégies élémentaires aux plus sophistiquées, et elle poussait ses élèves à aller au-delà de la méthode qui consiste à compter tout. La notion que les élèves développent leurs propres méthodes de calcul au hasard est loin de ce qui se passe réellement dans une classe de mathématiques efficace.

En résumé

Les élèves devraient apprendre leurs faits numériques. Toutefois, ils bénéficieraient d'apprendre ces faits à l'aide d'une série de stratégies de plus en plus sophistiquées plutôt que de recourir directement à la mémorisation. En travaillant avec ces stratégies, les élèves acquièrent des connaissances plus approfondies des mathématiques qui peuvent être utiles dans la vie quotidienne, ainsi que dans les cours de mathématiques de l'élémentaire et du secondaire. Les élèves qui progressent et deviennent habiles à utiliser des stratégies de plus en plus sophistiquées y parviennent, non pas grâce à l'enseignement explicite, mais plutôt parce que les enseignants ont proposé des problèmes bien construits qui font appel à ces stratégies en constante évolution et qui sont fondées sur une longue pratique dans différents contextes. Une fois que les élèves ont réfléchi à ces stratégies de raisonnement, ils peuvent mémoriser tous les faits qui ne sont pas encore devenus automatiques à l'aide d'exercices ciblés.[9]

Bibliographie

1. Wake-up call needed on math skills [Editorial]. (3 septembre 2014). *Guelph Mercury*, pp. A8.
2. Fuson, K. (2003). Developing mathematical power in whole number operations. Dans J. Kilpatrick (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 68–94). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
3. Henry, V., & Brown, R. (2008). First-grade basic facts: An investigation into teaching and learning of an accelerated, high-demand memorization standard. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 153–183.
4. Baroody, A. (2006). Why children have difficulties mastering the basic number combinations and how to help them. *Teaching Children Mathematics, 13*, 22–31.
5. Lawson, A. (2015). *What to look for: Understanding and developing student thinking in early numeracy*. Toronto, ON: Pearson.
6. Sarama, J., & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research: Learning trajectories for young children.* New York, NY: Routledge.
7. Kamii, C. (2000). *Young children reinvent arithmetic: Implications of Piaget's Theory* (2e ed.). New York, NY: Teachers College Press.
8. Fosnot, C. T., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing numbers sense, addition, and subtraction.* Portsmouth: Heinemann.
9. van de Walle, J., Karp, K., Bay-Williams, J., McGarvey, L., & Folk, S. (2015). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally.* (4e édition can.). Toronto: Pearson.
10. Gravemeijer, K., & van Galen, F. (2003). Making mathematics reasonable in school. Dans J. Kilpatrick, G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion for the principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
11. Lawson, A. (2005) [Gr. 1 children's mathematical thinking]. Données tirées d'une entrevue non publiée.

La série de monographies *Faire la différence… De la recherche à la pratique* est produite en collaboration par l'Ontario Association of Deans of Education et la Division du rendement des élèves du ministère de l'Éducation de l'Ontario.

Pour en savoir plus sur la façon de rédiger une monographie, **cliquez ici :** Mobiliser les résultats de la recherche pour les appliquer de façon significative, par Michelann Parr, Ph. D., et Terry Campbell, Ph. D., co-rédactrices.

La série *Faire la différence* est mise à jour et publiée à www.edu.gov.on.ca/fr/literacynumeracy/inspire/research/WhatWorks.html.

Les opinions et les conclusions exprimées dans ces monographies sont celles des auteurs; elles ne reflètent pas nécessairement les politiques, les opinions et les orientations du ministère de l'Éducation de l'Ontario ou de la Division du rendement des élèves.

ISSN 1913-1097 *Faire la différence… De la recherche à la pratique* (imprimé)

ISSN 1913-1100 *Faire la différence… De la recherche à la pratique* (en ligne)